X12M030 — Université de Nantes
Algèbre des polynômes et des matrices — 2021-2022

Interrogation 1

La qualité de la rédaction sera prise en compte.
Documents et calculatrices interdites.

1. (a) Calculer les racines carrées de $8-6i$.

Solution.
On cherche $x+iy$ tel que $(x+iy)^2 = 8-6i$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En calculant les parties réelle et imaginaire ainsi que le module, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & -6 \\ x^2+y^2 & = & 10 \end{array}\right. .$$

La première équation combinée avec la dernière donne $2x^2 = 18$ donc $x = \pm 3$, et $2y^2 = 2$ donc $y = \pm 1$. Puisque $xy < 0$, alors x et y sont de signes opposés, donc les racines carrées de $8-6i$ sont

$$3-i \text{ et } -3+i.$$

(b) Résoudre l'équation

$$z^2 + (-7+i)z + 10 - 2i = 0.$$

Solution.
On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (-7+i)^2 - 4\times 1\times(10-2i) = 8-6i.$$

D'après la première question, ses racines carrées sont $\pm\delta$ avec $\delta = 3-i$. Les solutions de l'équation sont alors

$$\alpha = \frac{-(-7+i)+\delta}{2} \text{ et } \beta = \frac{-(-7+i)-\delta}{2}$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 5-i \text{ et } \beta = 2.$$

2. (a) Déterminer la forme exponentielle de $1 - i$.

Solution.
Le module de $1 - i$ est $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Puisque

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

on en déduit que l'argument de $1 + i$ est $-\frac{\pi}{4}$, et finalement

$$1 + i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

(b) En déduire la forme exponentielle de $1 - i + \sqrt{2}$.

Solution.
D'après ce qui précède, on a

$$1 - i + \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + e^{-i\pi/4}).$$

Or, par un arc-moitié et d'après les formules d'Euler on a

$$1 + e^{-i\pi/4} = e^{-i\pi/8}\left(e^{i\pi/8} + e^{-i\pi/8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\pi/8}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, alors le module de $1 - i + \sqrt{2}$ est $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, et l'argument de $1 - i + \sqrt{2}$ est $-\frac{\pi}{8}$ (si on veut l'argument dans $[0, 2\pi[$, il faut prendre $\frac{15\pi}{8}$). Ainsi :

$$1 - i + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\pi/8}.$$