Interrogation 1

La qualité de la rédaction sera prise en compte.
Documents et calculatrices interdites.

1. (a) Calculer les racines carrées de $-2i$.

Solution:
On cherche $x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = -2i$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En calculant les parties réelle et imaginaire ainsi que le module, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & -2 \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{array} \right. .$$

La première équation combinée avec la dernière donne $2x^2 = 2$ donc $x = \pm 1$, et $2y^2 = 2$ donc $y = \pm 1$. Puisque $xy < 0$, alors x et y sont de signes opposés, donc les racines carrées de $-2i$ sont

$$1 - i \text{ et } -1 + i.$$

(b) Résoudre l'équation

$$z^2 - (3 - i)z + 2 - i = 0.$$

Solution:
On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (3 - i)^2 - 4 \times (2 - i) = -2i.$$

D'après la première question, ses racines carrées sont $\pm\delta$ avec $\delta = 1 - i$. Les solutions de l'équation sont alors

$$\alpha = \frac{3 - i + \delta}{2} \text{ et } \beta = \frac{3 - i - \delta}{2}$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 2 - i \text{ et } \beta = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{N}$ impair, que vaut $(1+x)\sum_{k=0}^{a-1}(-x)^k$?

Solution:
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=0}^{a-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^a}{1+x}$. Si a est impair alors $(-x)^a = -x^a$ donc $\sum_{k=0}^{a-1}(-x)^k = \frac{1+x^a}{1+x}$. Ainsi, $(1+x)\sum_{k=0}^{a-1}(-x)^k = 1+x^a$. (On peut aussi calculer cela par télescopage dans la somme.)

(b) En déduire que si n a un diviseur $a \geqslant 3$ impair, alors $2^n + 1$ n'est pas premier.

Solution:
On écrit $n = ab$ avec $a \geqslant 3$ impair. Alors $2^n + 1 = (2^b)^a + 1$. En prenant $x = 2^b$ dans la question précédente, on en déduit que $2^b + 1$ divise $2^n + 1$. Or, $a \geqslant 3$ donc $b \leqslant \frac{n}{3} < n$, donc $2 \leqslant 2^b + 1 < 2^n + 1$. Ainsi, $2^n + 1$ possède un facteur non trivial, donc n'est pas premier.

(c) Conclure que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Solution:
Ainsi, si $2^n + 1$ est premier alors n ne peut avoir que des diviseurs pairs. En particulier, tous ses diviseurs premiers sont pairs, donc ils sont tous égaux à 2. Donc n est une puissance de 2.

(d) Calculer $2^{2^k} + 1$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Lesquels de ces nombres sont premiers ? (Remarque : $17^2 = 289$.)

Solution:
On a : $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$ et $2^{2^3} + 1 = 257$.

On sait que 3, 5 et 17 sont premiers. Pour 257, il n'est pas divisible par 2, 3 et 5 (critères classiques de divisibilité). De plus :

$$\begin{aligned} 257 &= 7 \times 36 + 5 \\ &= 11 \times 23 + 4 \\ &= 13 \times 20 - 3 \end{aligned}$$

(la dernière ligne n'est pas une division euclidienne). Donc 257 n'est pas divisible non plus par 7, 11 et 13. Puisque $17^2 > 257$, alors 257 est premier.