X11M011 | Université de Nantes
Mathématiques avancées pour les sciences | 2022-2023

Devoir Maison

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Le but est d'étudier quelques propriétés de la fonction suivante, appelée fonction de Gudermann, et définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

Cette fonction fait un lien entre les fonctions circulaires cos, sin et tan, et les fonctions hyperboliques cosh, sinh et tanh données par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ \text{ et } \ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(Remarque : c'est presque comme les formules d'Euler, mais il manque les i.)

Exercice 1 (Allure de f).

1. Calculer $f(0)$.
2. Calculer $f(-x)$. Que peut-on déduire ?
   (Indication : on rappelle que pour tout $t > 0$, $\arctan(t) + \arctan(1/t) = \pi/2$.)
3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Calculer f', puis tracer l'allure de la courbe de f.

Solution.

1. On a $f(0) = 2\arctan(1) - \pi/2$. Or, $\arctan(1) = \pi/4$ puisque $\pi/4$ est le seul angle θ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ tel que $\tan(\theta) = 1$. Donc

$$f(0) = 2\pi/4 - \pi/2 = 0.$$

2. D'après l'indication, $\arctan(1/e^x) = \pi/2 - \arctan(e^x)$, donc

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\arctan(e^{-x}) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(e^x)\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \pi - 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \\ &= -2\arctan(e^x) + \frac{\pi}{2} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est impaire.

3. En $-\infty$, l'exponentielle tend vers 0. Donc par continuité de arctan, f tend vers $2\arctan(0) - \pi/2$ c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

En $+\infty$, l'exponentielle tend vers $+\infty$. Donc par continuité de arctan, f tend vers $2\lim_{+\infty}\arctan - \pi/2$, Puisque arctan tend vers $+\infty$, alors :

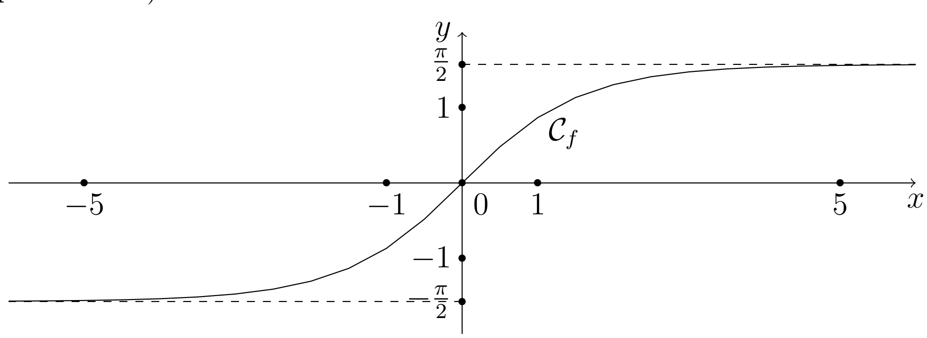
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On peut aussi calculer une des deux limites et utiliser l'imparité pour calculer l'autre.

4. La dérivée de f est

$$f'(x) = 2e^x \times \frac{1}{1+(e^x)^2} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}.$$

(On remarque en passant que $f'(x) = 1/\cosh(x)$.) Ainsi, f' est le quotient de deux fonctions strictement positives, donc est strictement positive. On en déduit que f est strictement croissante.
(Pour étudier les variations on pouvait aussi dire que exp et arctan sont strictement croissantes, donc f est strictement croissante par composition. C'est plus rapide, mais on demandait de dériver dans cette question. De plus, dériver permet aussi calculer la pente de la tangente en certains points pour avoir une idée plus précise de la courbe ; par exemple $f'(0) = 1$.)
La courbe de f est représentée ci-dessous. (Oui, ça ressemble à arctan mais ce n'est pas arctan.)



$\square$

Exercice 2 (Lien entre fonctions circulaires et hyperboliques).

1. Soit $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.
   (a) Montrer que $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

(b) Montrer que $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}$.

2. Montrer que $\cos(f(x)) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$.

On peut aussi montrer (ce n'est pas demandé) que

$$\sin(f(x)) = \tanh(x) \text{ et } \tan(f(x)) = \sinh(x).$$

Solution. 1. (a) On utilise la relation $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ (on peut retrouver cette formule avec un dessin), ainsi que la parité du cosinus :

$$\begin{aligned}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\\ &= \sin(2\alpha)\\ &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

(b) Si on part de la gauche, on peut écrire

$$\begin{aligned}2\sin(\alpha)\cos(\alpha) &= \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2}\\ &= \frac{2\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1+\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}}\\ &= \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}.\end{aligned}$$

Si on part de la droite, on écrit les mêmes calculs mais de bas en haut. (Remarque : puisque $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors $\cos(\alpha) \in]0,1]$ et on peut diviser par $\cos(\alpha)$.)

2. On utilise les questions précédentes avec $\alpha = \arctan(e^x)$, qui est bien dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\cos(f(x)) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}.$$

Or, on a $\tan(\alpha) = \tan(\arctan(e^x)) = e^x$, donc

$$\cos(f(x)) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

(Remarque : avec le calcul de la dérivée dans l'exercice 1, on a montré que f est une solution de l'équation différentielle non-linéaire d'ordre 1 : $y'(t) = \cos(y(t))$.)

□

Exercice 3 (Autre expression de f).
On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \arcsin(\tanh(x)).$$

1. Montrer que
$$\tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
2. Calculer g'.
3. Montrer que $f = g$. (On rappelle qu'on a calculé f' dans l'exercice 1.)

On peut aussi montrer (ce n'est pas demandé) que

$$f(x) = \arctan(\sinh(x)) = \operatorname{signe}(x) \times \arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right).$$

Solution. On commence déjà par vérifier que g est bien définie. Pour cela, il faut s'assurer que $-1 \leqslant \tanh(x) \leqslant 1$, ce que je vous laisse faire.

1. On prend son temps pour le calcul, et on dérive d'abord $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$:
$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \text{ et } \cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$
(tiens, ça ressemble un peu aux relations entre cos, sin et leurs dérivées, sauf qu'ici on n'a pas de signe $-$). Alors en dérivant un produit :
$$\tanh' = \frac{\sinh' \cosh - \sinh \cosh'}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2}.$$
Ensuite, puisque $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$, alors $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (ça ne vous rappelle pas une relation entre cos et sin ? À un signe près...), donc
$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh(x)^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
(Remarque : un peu plus haut, on a $\tanh' = (\cosh^2 - \sinh^2)/\cosh^2 = 1 - \tanh^2$. Bref, on a montré que
$$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2.$$
Est-ce que ça ne serait la même relation qu'entre tan, tan′ et cos (modulo un signe) ?)

2. On peut maintenant dériver g :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \tanh'(x)\arcsin'(\tanh(x)) \\
&= (1-\tanh(x)^2)\frac{1}{\sqrt{1-\tanh(x)^2}} \\
&= \sqrt{1-\tanh(x)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\cosh(x)^2}} \\
&= \frac{1}{\cosh(x)},
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $\cosh > 0$.

3. Ainsi, $f' = g'$. Puisque f et g sont toutes les deux définies (et continues et dérivables) sur $\mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que $f(x) = g(x) + C$. En évaluant en 0, on a $f(0) = g(0) + C$. Or, $f(0) = 0$ et $g(0) = \arcsin(0) = 0$, donc $C = 0$, et $f = g$.

$\square$