X21M020 — Université de Nantes
Fonctions de plusieurs variables — 2023-2024

Interrogation 1

La **qualité de la rédaction** sera prise en compte.
Documents et calculatrices interdites.

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$
2. Soit f une des fonctions déterminées en 1. Quels sont ses points critiques ?
3. Quelle est la nature des points critiques de f ?

Solution.

1. Grâce à la première dérivée partielle, on sait que f est de la forme $f(x,y) = x^3 - 3xy + g(y)$, où g est une fonction en une variable de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant par rapport à y, on trouve $-3x + g'(y) = 3y^2 - 3x$, donc $g'(y) = 3y^2$ et $g(y) = y^3 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, les fonctions f solutions sont de la forme $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   Réciproquement, si $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, alors on calcule
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$
2. Pour chercher les points critiques de f on étudie l'annulation des dérivées partielles. On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y & = & 0 \\ 3y^2 - 3x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x & = & y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y = 0 \\ \text{ou} \\ x = y = 1 \end{array}\right. .$$
   Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.
3. La Hessienne de f est
$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$
   Au point critique $(0,0)$ on a donc
$$A = \mathrm{Hess}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On calcule $\det(A) = -9 < 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
   Au point critique $(1,1)$ on a donc
$$B = \mathrm{Hess}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$
   On calcule $\det(B) = 27 > 0$ et $\mathrm{tr}(B) = 12 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum local.

$\square$

Exercice 2.
Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe la valeur absolue de son coefficient dominant, c'est-à-dire : $N(0) = 0$ et $N(P) = |a_n|$ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $n = \deg(P)$.

1. Montrer que N vérifie les axiomes de séparation et d'homogénéité.
2. L'application N est-elle une norme ? Justifier.

Solution.

1. Si $P \neq 0$, alors il s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et alors $N(P) = |a_n| \neq 0$. Par contraposée, N vérifie l'axiome de séparation.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$ alors $N(\lambda P) = 0 = |\lambda| N(P)$. On suppose maintenant $\lambda \neq 0$. Si $P = 0$ alors $N(\lambda P) = 0 = |\lambda| N(P)$. Si $P \neq 0$, on l'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$ avec $\lambda a_n \neq 0$. Donc $N(\lambda P) = |\lambda a_n| = |\lambda| N(P)$. Donc N est homogène.

2. Si $P = X + 172$ et $Q = -X$, alors $P + Q = 172$ et $N(P+Q) = 172 > 1 + 1 = N(P) + N(Q)$. Donc N n'est pas une norme puisqu'elle ne vérifie par l'inégalité triangulaire.

$\square$

Exercice 3.
On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(\star) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On considère le changement de variables $\varphi(x, y) = (y - x, 3x - 2y)$.

1. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$. On pose $g(x, y) = f(\varphi(x, y))$. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $g(x, y) = h(y)$.
2. On note $(u, v) = \varphi(x, y)$. Déterminer le changement de variables inverse φ^{-1}, c'est-à-dire l'application telle que $(x, y) = \varphi^{-1}(u, v)$.
3. Résoudre $(\star)$.

Solution.

1. On veut montrer que g ne dépend pas de x, pour cela on calcule sa dérivée partielle par rapport à x. On a

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y - x, 3x - 2y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y - x, 3x - 2y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(y - x, 3x - 2y) = 0.$$

   Donc g est indépendante de x et on peut écrire $g(x, y) = h(y)$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque f et φ le sont, alors h est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

2. En résolvant le système
$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & y-x \\ v & = & 3x-2y \end{array}\right.$$
on trouve
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2u+v \\ y & = & 3u+v \end{array}\right.$$
donc $\varphi^{-1}(u,v) = (2u+v, 3u+v)$.

3. Si f est solution de $(\star)$ et si $g = f \circ \varphi$, on a vu qu'il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = h(y)$. Puisque $f = g \circ \varphi^{-1}$, alors $f(x,y) = g(2x+y, 3x+y)$ donc $f(x,y) = h(3x+y)$.
   Réciproquement, s'il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x,y) = h(3x+y)$, on vérifie en calculant les dérivées partielles que f est solution de $(\star)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3h'(3x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(3x+y)$$
   donc f est bien solution de $(\star)$.

$\square$