X21M020 Université de Nantes
Fonctions de plusieurs variables 2023-2024

Interrogation 2

La **qualité de la rédaction** sera prise en compte.
Documents et calculatrices interdites.

Exercice 1.
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$ pour toutes matrices A, B. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. On a montré en TD que

$$B(I_n, 1) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que $\|A^{-1}\| \neq 0$.
   (b) Soit $M \in B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$. Montrer que $A^{-1}M \in B(I_n, 1)$, et en déduire
   $$B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$
2. Que peut-on en déduire sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?
3. (Bonus) Trouver une autre preuve du résultat de la question 2.

Solution. 1. (a) Puisque A^{-1} est inversible, elle est non nulle. Comme $\|\cdot\|$ est une norme alors $\|A^{-1}\| \neq 0$.
(b) On calcule $\|A^{-1}M - I_n\| = \|A^{-1}(M - A)\| \leqslant \|A^{-1}\| \times \|A - M\| < 1$. Donc $A^{-1}M \in B(I_n, 1)$. Ainsi, $A^{-1}M$ est inversible, donc M est inversible.

2. Pour toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on a trouvé une boule ouverte autour de cette matrice incluse dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

3. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale (en les coefficients de la matrice) donc continue, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Comme $\mathbb{R}^*$ est ouvert, alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

□

Exercice 2.
On va montrer que les seules parties de $\mathbb{R}$ à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie ouverte et fermée et $B = \mathbb{R} \setminus A$. Par l'absurde, on suppose $A \neq \varnothing$ et $A \neq \mathbb{R}$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. On considère

$$I = \{t \in [0, 1] \mid (1 - t)a + tb \in A\}.$$

1. Justifier que I est non vide.

On note $s = \sup I$ la borne supérieure de I.

2. Montrer que I est fermé et en déduire que $s \in I$. (Indication : A est fermé.)
3. Montrer que $s < 1$.
4. Montrer qu'il existe $r > s$ tel que $r \in I$, et conclure. (Indication : A est ouvert.)

Solution.

1. Puisque $a \in A$, alors $0 \in I$ donc I est non vide.
2. *Méthode 1 :* l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (1-t)a + tb$ est continue, et $I = f^{-1}(A)$. Comme A est fermé par hypothèse, alors I est fermé.

   Méthode 2 : soit $(t_n)_n$ une suite de I qui converge vers t_∞, montrons que $t_\infty \in I$. La suite $(x_n)_n = ((1-t_n)a + t_n b)_n$ d'éléments de A converge vers $x_\infty = (1-t_\infty)a + t_\infty b$. Comme A est fermé, alors $x_\infty \in A$ et donc $t_\infty \in I$ par définition de I. Donc I est fermé.

   Par définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t \in I$ tel que $t > s - \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1/n$ on construit une suite $(t_n)_n$ de I qui converge vers s. Comme I est fermé, alors $s \in I$.
3. Si $s = 1$, alors comme $s \in I$ on a $b \in A$, ce qui est absurde. Donc $s < 1$.
4. L'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (1-t)a + tb$ est continue, et $I = f^{-1}(A)$. Comme A est ouvert par hypothèse, alors I est ouvert. En particulier, comme $s \in I$ il existe une boule autour de s qui est incluse dans I : $\exists \varepsilon > 0,\ B(s,\varepsilon) \subset I$. Dans $\mathbb{R}$, une boule se récrit comme un intervalle : $B(s,\varepsilon) =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$. Soit $r \in]s, s+\varepsilon[$. Alors $r > s$ et $r \in I$.

   Ceci contredit la définition de s (borne supérieure de I), donc on a nécessairement $A = \varnothing$ ou $A = \mathbb{R}$.

$\square$