Théorème de Bohr-Mollerup

▷ **Leçons.** 229, 253, 265

▷ **Développement.** Il s'agit de démontrer que la fonction Gamma d'Euler est caractérisée par trois propriétés : sa valeur en 1, sa relation fonctionnelle et sa log-convexité. Ce développement n'est pas difficile mais je l'aime bien. Pour ne pas être trop court, il me paraît nécessaire d'y adjoindre des applications.

Théorème 1 (Bohr-Mollerup). Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

1. $f(1) = 1$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$,
3. f est log-convexe.

De plus, cette fonction est la fonction Γ.

Démonstration. Rappelons que Γ est définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ pour $x > 0$.

Étape 1. Montrons que Γ satisfait ces conditions.

On calcule immédiatement $\Gamma(1) = 1$. Pour $x > 0$, une intégration par partie donne

$$\int_0^T e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_0^T + x\int_0^T e^{-t}t^{x-1}dt = -e^{-T}T^x + x\int_0^T e^{-t}t^{x-1}dt$$

et donc dans la limite $T \to +\infty$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = 0 + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x).$$

Enfin, soit $\lambda \in]0,1[$. L'inégalité de Hölder appliquée avec $p = \frac{1}{\lambda}$ et $q = \frac{1}{1-\lambda}$ donne

$$\begin{array}{rcl} \Gamma((1-\lambda)x+\lambda y) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{-t}t^{x-1})^{(1-\lambda)}(e^{-t}t^{y-1})^{\lambda}dt \\ & \leqslant & \displaystyle\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\right)^{1-\lambda}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt\right)^{\lambda} \\ & = & \Gamma(x)^{1-\lambda}\Gamma(y)^{\lambda}. \end{array}$$

En prenant le logarithme, on a $\ln(\Gamma((1-\lambda)x+\lambda y)) \leqslant (1-\lambda)\ln(\Gamma(x)) + \lambda\ln(\Gamma(y))$ et donc Γ est bien log-convexe.

Étape 2. Montrons que ces conditions caractérisent Γ.

Soit f une fonction vérifiant les trois conditions. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la relation fonctionnelle donne

$$f(x+n) = (x+n-1)...(x+1)xf(x)$$

de sorte que f est entièrement déterminée par ses valeurs sur $]0,1]$. De plus, puisque $f(1)=1$ on obtient $f(n)=(n-1)!$. En supposant maintenant $n \geqslant 2$, la log-convexité nous permet d'écrire par croissance des pentes :

$$\frac{\ln(f(n))-\ln(f(n-1))}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln(f(n+x))-\ln(f(n))}{(n+x)-n} \leqslant \frac{\ln(f(n+1))-\ln(f(n))}{(n+1)-n}$$

ce qui, compte tenu de $f(n)=(n-1)!$ donne

$$\ln(n-1) \leqslant \frac{\ln(f(n+x))-\ln((n-1)!)}{x} \leqslant \ln(n)$$

puis

$$\ln((n-1)^x(n-1)!) \leqslant \ln(f(n+x)) \leqslant \ln(n^x(n-1)!)$$

soit, par croissance de l'exponentielle et grâce à la relation fonctionnelle,

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant (x+n-1)...(x+1)xf(x) \leqslant n^x(n-1)!$$

et enfin

$$g_{n-1}(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x)\frac{x+n}{n}$$

où on a noté

$$g_n(x) = \frac{n^x n!}{(x+n)...(x+1)x}.$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $n \geqslant 2$, on a donc $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x)\frac{x+n}{n}$ ou, de manière équivalente, $\frac{n}{x+n}f(x) \leqslant g_n(x) \leqslant f(x)$ ce qui montre que la suite $(g_n)_n$ converge simplement vers f pour x dans $]0,1]$. Or, puisque f est choisie quelconque vérifiant les trois conditions, ceci montre que f est uniquement déterminée, et la première étape montre que $f=\Gamma$. □

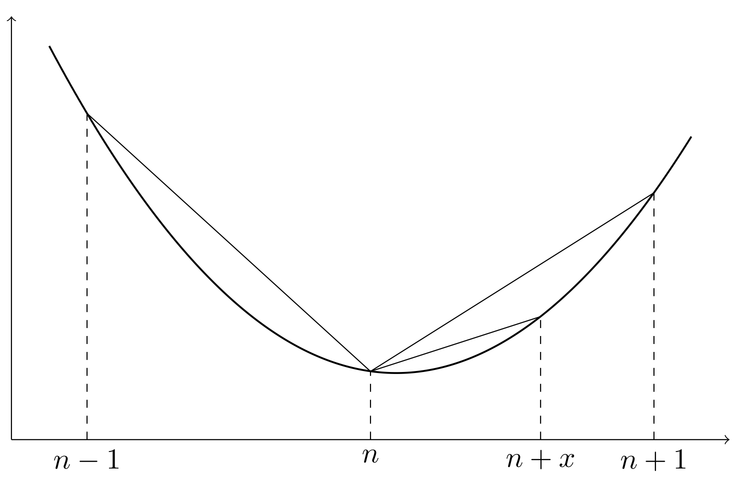

Figure 1 – Illustration de la croissance des pentes

Remarque. On a en même temps montré la formule suivante, due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1],\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}.$$

En utilisant la relation fonctionnelle, on montre que cette formule est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Application 2 (Lien avec la fonction Bêta). On définit la fonction Bêta sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt.$$

Les fonctions Gamma et Bêta sont liées par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Démonstration. Fixons y dans $\mathbb{R}_+^*$, et posons $f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x,y)$. L'idée est d'appliquer le théorème précédent à f.

Pour cela, on calcule $B(1,y) = \frac{1}{y}$. Étant donné $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$, on trouve donc $f(1) = 1$. Par ailleurs, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}dt \\ &= \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{-(x+y)}\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}(1-t)^{x+y-2}dt \\ &= 0 + \frac{x}{x+y}B(x,y) \end{aligned}$$

de sorte que

$$f(x+1) = \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\frac{x}{x+y}B(x,y) = xf(x).$$

Enfin, soit $\lambda \in]0,1[$. L'inégalité de Hölder appliquée avec $p = \frac{1}{\lambda}$ et $q = \frac{1}{1-\lambda}$ donne

$$\begin{aligned} B((1-\lambda)x + \lambda x', y) &= \int_0^1 (t^{x-1}(1-t)^{y-1})^{(1-\lambda)}((1-t)^{x'-1}(1-t)^{y-1})^{\lambda}dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{1-\lambda}\left(\int_0^1 t^{x'-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{\lambda} \\ &= B(x,y)^{1-\lambda}B(x',y)^{\lambda} \end{aligned}$$

de sorte que $x \mapsto B(x,y)$ est log-convexe. Puisque $x \mapsto \Gamma(x+y)$ l'est également, il s'ensuit que f est log-convexe.

Ainsi, d'après le théorème de Bohr-Mollerup, on a $f = \Gamma$ et donc

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

Application 3 (Formule de duplication de Legendre). Pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Démonstration. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})$. Encore une fois, il s'agit d'appliquer le théorème de Bohr-Mollerup à la fonction f.

Le calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$ est classique. On peut par exemple poser $t = u^2$ dans la définition de Γ pour se ramener au calcul de l'intégrale de Gauss. On peut aussi poser $t = \sin(\theta)^2$ dans la définition de la fonction Bêta, et utiliser le résultat précédent. Dans tous les cas, on doit trouver $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ de sorte que $f(1) = 1$. Par ailleurs, un calcul donne

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xf(x). \end{aligned}$$

Enfin, la log-convexité de Γ et de $x \mapsto 2^{x-1}$ implique immédiatement celle de f. Par théorème de Bohr-Mollerup, $f = \Gamma$. □

▷ Questions possibles.

Question. Le théorème reste-t-il vrai en enlevant une des conditions ?

Réponse. Sans (1), toutes les fonctions $f = \lambda\Gamma$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ conviendraient. Sans (2), la fonction donnée par $f(x) = e^{x-1}$ conviendrait. Sans (3), ... ? □

Question. Peut-on remplacer la log-convexité par la convexité ?

Question. Les différentes formules montrées sont-elles valables plus généralement (par exemple pour x réel en dehors de $]0,1[$, ou pour z complexe) ?

▷ **Références.** On peut trouver le théorème de Bohr-Mollerup dans [Rud09] ou [Rud06], ce dernier ayant l'avantage de présenter aussi les applications. On trouve dans [Gou08] les propriétés classiques de la fonction Γ (vue comme fonction réelle), ainsi que d'autres démonstrations des formules de Gauss et de Legendre.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Les maths en tête. Ellipses, 2008.

[Rud06] Walter Rudin : *Principes d'analyse mathématique.* Dunod, 2006.

[Rud09] Walter Rudin : *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 2009.