Théorème de Fourier-Plancherel

▷ **Leçons.** 201, 205, 207, 208, 234, 235, 239, 250 (Est-ce un développement jackpot ou un recasage abusif ? C'est vous qui voyez.)

▷ **Développement.** L'objectif est de montrer que la transformée de Fourier, définie a priori sur $L^1(\mathbb{R})$, se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. On y utilise des produits de convolution, quelques théorèmes de théorie de l'intégration et un théorème de prolongement.

Il existe plusieurs conventions de normalisation pour la transformée de Fourier. Nous prendrons les choix suivants :

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note

$$\widehat{f} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$$

sa transformée de Fourier ;

— pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on note

$$f * g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t-x) g(x) dx$$

le produit de convolution de f et g. Ceci est bien défini pour presque tout t, et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$;

— pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on note

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Cette formule définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$, on note $\| \cdot \|_2$ la norme associée. On rappelle que l'espace $(L^2(\mathbb{R}), \| \cdot \|_2)$ est complet.

Bien sûr ce choix est discutable, mais il présente au moins deux avantages : les normalisations pour la transformée de Fourier et pour la transformée de Fourier inverse sont les mêmes, à savoir on met $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devant l'intégrale ; et la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ sera une vraie isométrie, sans facteur multiplicatif qui traîne.

Le tout est peut-être un peu long pour tenir en 15 minutes. Selon la leçon, on peut adapter ce que l'on présente. Par exemple, le lemme est intéressant pour les leçons d'intégrales, tandis que le dernier théorème convient mieux aux espaces complets et aux prolongements.

Lemme 1 (Une approximation de l'unité). Soit $\varphi : x \mapsto e^{-|x|}$ et $\varphi_n : x \mapsto \varphi(\frac{x}{n})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la suite $(\widehat{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité, et pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} g * \widehat{\varphi_n}(t) = g(t).$$

Démonstration. Montrons d'abord qu'on a bien défini une approximation de l'unité.

— On calcule rapidement $\widehat{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$, et les manipulations élémentaires sur les transformées de Fourier donnent $\widehat{\varphi_n}(t) = n\widehat{\varphi}(nt)$ donc $\widehat{\varphi_n} \geqslant 0$.

— De plus, on a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}=1$ et donc $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi_n}=1$.

— Enfin, pour $\varepsilon>0$ on a

$$\int_{|t|>\varepsilon}\widehat{\varphi_n}(t)dt=\int_{|u|>n\varepsilon}\widehat{\varphi}(u)du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\arctan(-n\varepsilon)+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arctan(n\varepsilon)\right)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|t|>\varepsilon}\widehat{\varphi_n}(t)dt=0.$$

Ainsi, $(\widehat{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

Soit maintenant $g\in\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}|g*\widehat{\varphi_n}(t)-g(t)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}(g(t-x)-g(t))n\widehat{\varphi}(nx)dx\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(g\left(t-\frac{u}{n}\right)-g(t)\right)\widehat{\varphi}(u)du\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(g\left(t-\frac{u}{n}\right)-g(t)\right)\widehat{\varphi}(u)\right|du.\end{aligned}$$

Or, $|(g(t-\frac{u}{n})-g(t))\widehat{\varphi}(u)|\leqslant 2\|g\|_\infty\widehat{\varphi}(u)$. Comme g est bornée et $\widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R})$, alors par théorème de convergence dominée :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(g\left(t-\frac{u}{n}\right)-g(t)\right)\widehat{\varphi}(u)\right|du\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|(g(t)-g(t))\widehat{\varphi}(u)|\,du=0$$

car g est continue donc $g(t-\frac{u}{n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}g(t)$. On a bien $|g*\widehat{\varphi_n}(t)-g(t)|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. □

Théorème 2 (Plancherel). Soit $f\in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$.

Démonstration. On note $\widetilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$, on a $\widehat{\widetilde{f}}=\overline{\widehat{f}}$. Pour $t\in\mathbb{R}$, on note $\tau_t f=f(\cdot-t)$ la translatée de f.

Étape 1. On introduit une fonction auxiliaire $g=f*\widetilde{f}$.

Puisque f et $\widetilde{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors g aussi. De plus, f et $\widetilde{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ donc par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $t\in\mathbb{R}$ la fonction $x\mapsto f(t-x)\widetilde{f}(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, de sorte que $g(t)$ est bien défini. Par définition, on a la formule

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(t-x)\overline{f(-x)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(t+y)\overline{f(y)}dy=\langle\tau_{-t}f,f\rangle$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que g est bornée avec $\|g\|_\infty\leqslant\|f\|_2^2$. Par ailleurs, la continuité de $x\mapsto\tau_x f$ et du produit scalaire pour $\|\cdot\|_2$ entraînent la continuité de g. Enfin, on calcule

$$\widehat{g}=\widehat{f}\times\widehat{\widetilde{f}}=\widehat{f}\times\overline{\widehat{f}}=|\widehat{f}|^2\quad\text{et}\quad g(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(-x)\overline{f(-x)}dx=\|f\|_2^2.$$

En résumé, la fonction auxiliaire g introduite vérifie

$$g\in\mathcal{C}_b^0\cap L^1(\mathbb{R}),\ \widehat{g}=|\widehat{f}|^2\geqslant 0\text{ et }g(0)=\|f\|_2^2.$$

Étape 2. On se sert d'une unité approchée.

On reprend les notations du lemme précédent. Comme g est continue et bornée, ce lemme donne

$$\lim_{n\to+\infty} g * \widehat{\varphi_n}(0) = g(0) = \|f\|_2^2.$$

Étape 3. On calcule la limite ci-dessus d'une autre façon.

Par définition, on a

$$g * \widehat{\varphi_n}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} g(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y\in\mathbb{R}} \varphi_n(y) e^{-ixy} dy dx.$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |g(-x)\varphi_n(y)e^{-ixy}| dy dx = \|g\|_1 \|\varphi_n\|_1 < +\infty$, alors par théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}
g * \widehat{\varphi_n}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y\in\mathbb{R}} \varphi_n(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} g(-x) e^{-ixy} dx dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y\in\mathbb{R}} \varphi_n(y) \widehat{g}(-y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{R}} \varphi_n(x) \widehat{g}(x) dy.
\end{aligned}$$

où on a utilisé la parité de φ_n. Or, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$ et $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers 1. Comme $\widehat{g} \geqslant 0$, alors la suite $(\varphi_n \widehat{g})_n$ converge simplement en croissant vers $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2$, et par théorème de convergence monotone :

$$g * \widehat{\varphi_n}(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Étape 4. Conclusion.

Par unicité de la limite, on en déduit $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. □

Théorème 3 (Fourier-Plancherel). La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge en une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, encore notée $\mathcal{F}$.

Démonstration. D'après le théorème précédent, $\mathcal{F}$ définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ est à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ et est une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_2$ au départ et à l'arrivée. En particulier, elle est uniformément continue. Or, $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$, et $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est complet. Par théorème de prolongement des applications uniformément continues, $\mathcal{F}$ se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ en une application uniformément continue. Son caractère isométrique est préservé par densité et continuité. □

▷ **Questions possibles.** Outre les manipulations élémentaires sur les transformées de Fourier qu'il faut savoir faire et les théorèmes classiques type convergence dominée dont il faut au moins avoir une idée de la démonstration, voici quelques questions qui me semblent légitimes de se poser autour de ce développement.

Question 1. Démontrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $x \mapsto \tau_x f$ est continue pour $\| \cdot \|_p$.

Réponse. On le fait d'abord pour les fonctions continues à support compact en utilisant l'uniforme continuité. Puis on étend le résultat aux fonctions dans $L^p(\mathbb{R})$ par densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|_p$ (il faut peut-être avoir une idée de la démonstration de ce résultat). □

Question 2. Démontrer que $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $\| \cdot \|_2$.

Réponse. Étant donné $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose $f_n = f \mathbb{1}_{[-n,n]}$. On a $f_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, et $(f_n)_n$ converge vers f pour la norme $\| \cdot \|_2$. □

Question 3. Concrètement, comment calculer la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, celle-ci étant définie de manière abstraite ?

Réponse. On prend la suite $(f_n)_n$ précédente. On peut calculer les transformées de Fourier $\widehat{f_n}$ car $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Par continuité de $\mathcal{F}$, on a $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Si on identifie une fonction g telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\widehat{f_n}(t) \to g(t)$, alors $g = \widehat{f}$. En effet, puisque $(\widehat{f_n})_n$ converge vers $\widehat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(\widehat{f_{\varphi(n)}})_n$ qui converge presque partout vers $\widehat{f}$. Or, cette sous-suite converge ponctuellement vers g, donc par unicité de la limite presque partout, $g = \widehat{f}$. □

▷ **Références.** J'ai utilisé [Rud09], mais cela doit pouvoir se trouver dans n'importe quel bouquin traitant de transformation de Fourier, par exemple [EA08] (attention toutefois à la normalisation choisie !).

[EA08] Mohammed El Amrani : *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.

[Rud09] Walter Rudin : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2009.