Théorème de Steinhaus

▷ **Leçons.** 207, 241, 243, 245, 262

▷ **Développement.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On sait que si $|z| < R$ alors la série converge absolument et que si $|z| > R$ alors elle diverge. En revanche, pour $|z| = R$ on ne peut rien affirmer en général. Par exemple, pour $a_n = 1$ la série diverge sur tout le bord du disque de convergence ; pour $a_n = \frac{1}{n^2}$ elle converge sur tout le bord du disque ; et pour $a_n = \frac{1}{n}$ elle converge en certains points du bord du disque, et diverge en d'autres (pour les détails, voir [Hau07]).

Il y a beaucoup à dire sur le comportement des séries entières sur le bord de leurs disques de convergence : théorèmes d'Abel, théorèmes taubériens, résultats sur les séries lacunaires, existence ou non de points singuliers... C'est sur ce dernier point que nous nous attarderons pour ce développement. Pour les autres, je vous invite à consulter la page personnelle de Théo Untrau : il a rédigé un document regroupant plusieurs résultats sur le sujet.

Rentrons dans le vif du sujet.

Définition 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soit z un complexe de module R. On dit que z est :

— un point régulier pour cette série s'il existe un voisinage ouvert V de z et une fonction holomorphe g définie sur V qui coïncide avec f sur $V \cap B(0, R)$;

— un point singulier autrement.

On dit que le cercle $\partial B(0, R)$ est une coupure pour la série entière (ou pour f) si tous ses points sont singuliers.

Le théorème de Steinhaus dit que les bords des disques de convergences sont très souvent des coupures. On l'énonce et le démontre avec $R = 1$ pour simplifier, mais il est valable plus généralement.

Théorème 2 (Steinhaus). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $\mathbb{S}^1$ et définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $\omega \in \Omega$, notons f_ω la somme de $\sum a_n U_n(\omega) z^n$ sur $B(0, 1)$. Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est une coupure pour f_ω.

Démonstration. Introduisons quelques notations avant de commencer. Soit $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{Q}\}$, cet ensemble est dénombrable et dense dans $\mathbb{S}^1$. Pour I un arc de cercle, on note $I_{\mathbb{Q}} = I \cap \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$. Notons $\mathcal{C} = \{\{e^{i\theta},\ \theta \in]a, b[\},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ l'ensemble des arcs de cercles ouverts entre deux points de $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$; cet ensemble est également dénombrable. Enfin, soit

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \exists a \in \mathbb{S}^1 \text{ régulier pour } f_\omega\}.$$

On voudrait montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$ pour établir le théorème. Or, le calcul de $\mathbb{P}(B)$ n'est licite que si B est un évènement. Nous allons donc réécrire B différemment pour montrer que c'est effectivement un évènement, puis nous calculerons sa probabilité.

Étape 1. Réécriture de B.

Avant tout, par densité de $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{S}^1$ on a

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \exists a \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} \text{ régulier pour } f_\omega\}.$$

Soit $\omega \in \Omega$ et $a \in \mathbb{S}^1$ un point régulier pour f_ω. Il existe un rayon $r > 0$ et une fonction holomorphe g sur $B(a,r)$ tel que f_ω et g coïncident sur $B(0,1) \cap B(a,r)$. Notons $I = \mathbb{S}^1 \cap B(a,r)$. Alors $B(a,r)$ est un voisinage ouvert de chacun des points de I sur lequel est définie une fonction holomorphe g qui coïncide avec f_ω sur $B(0,1) \cap B(a,r)$, de sorte que tous les points de I sont réguliers pour f_ω. Quitte à réduire I, on peut de plus supposer $I \in \mathcal{C}$.

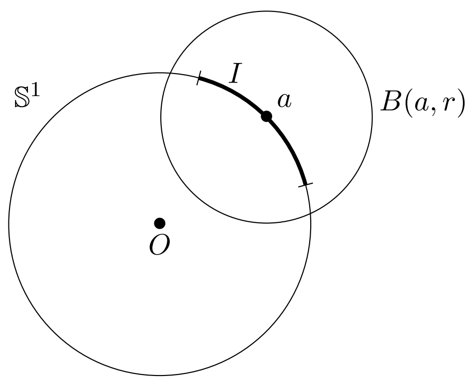


Figure 1 – L'arc de cercle I, en gras

Ainsi, en notant

$$A_I = \{\omega \in \Omega \mid \forall a \in I_{\mathbb{Q}},\ a \text{ est régulier pour } f_\omega\}$$

pour I un arc de cercle quelconque, on a montré que $B \subset \cup_{I \in \mathcal{C}} A_I$. L'autre inclusion étant évidente, on a

$$B = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} A_I.$$

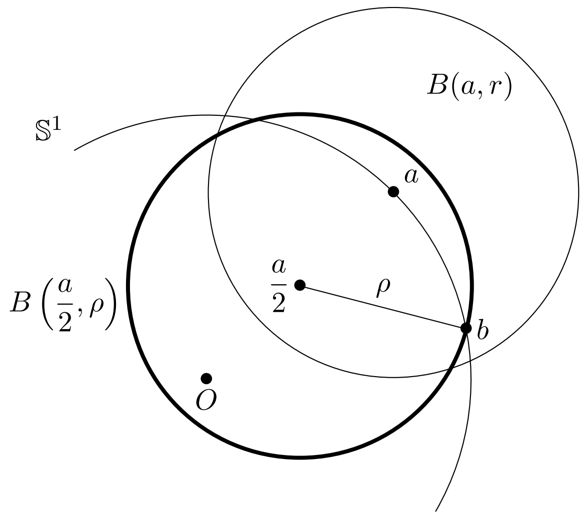
Ainsi, pour montrer que B est un évènement il suffit, car $\mathcal{C}$ est dénombrable, de montrer que chacun des A_I pour $I \in \mathcal{C}$ en est un ; et pour montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$, il suffit par σ-sous additivité, toujours puisque $\mathcal{C}$ est dénombrable, de montrer que $\mathbb{P}(A_I) = 0$ pour tout $I \in \mathcal{C}$.

Étape 2. Montrons que A_I est bien un évènement (c'est-à-dire qu'il est mesurable).

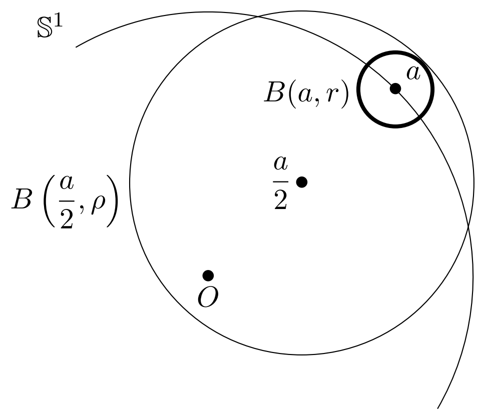
Soit $\omega \in \Omega$ et $a \in \mathbb{S}^1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a \text{ est régulier pour } f_\omega \quad &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ f \text{ se prolonge holomorphiquement à } B(a,r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \rho > \frac{1}{2},\ f \text{ se prolonge holomorphiquement à } B\left(\frac{a}{2}, \rho\right) \end{aligned}$$

En effet, si f_ω se prolonge holomorphiquement à $B(a,r)$, il existe un point $b \in \mathbb{S}^1 \cap B(a,r)$ différent de a. Puisque $\overline{B(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})}$ ne rencontre $\mathbb{S}^1$ qu'en a, alors $\rho = |b - \frac{a}{2}| > \frac{1}{2}$, et $B(\frac{a}{2}, \rho)$ est incluse dans $B(0,1) \cup B(a,r)$, de sorte que f_ω peut-être prolongée holomorphiquement à $B(\frac{a}{2}, \rho)$. Réciproquement, si f_ω se prolonge à $B(\frac{a}{2}, \rho)$, alors elle se prolonge à $B(a,r)$ avec $r < \rho - \frac{1}{2}$, car ce disque est inclus dans $B(\frac{a}{2}, \rho)$.



(a) Prolongement sur $B(\frac{a}{2},\rho)$



(b) Prolongement sur $B(a,r)$

FIGURE 2 – Prolongement de f_ω

De plus, dans le cas où l'une de ces propositions est vraie, on a

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_\omega^{(n)}(\frac{a}{2})}{n!} \left(z - \frac{a}{2}\right)^n$$

pour $z \in B(\frac{a}{2},\rho)$, et donc :

$$\begin{aligned} a \text{ est régulier pour } f_\omega \quad &\Leftrightarrow \quad \text{le rayon de convergence de cette série est } > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(\frac{a}{2})}{n!} \right|^{1/n} < 2 \end{aligned}$$

grâce à la formule de Hadamard. On a donc montré

$$A_I = \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall a \in I_{\mathbb{Q}},\ \limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(\frac{a}{2})}{n!} \right|^{1/n} < 2 \right\}.$$

Or, une somme et une $\limsup$ de variables aléatoires sont des variables aléatoires, donc A_I est mesurable comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Étape 3. Montrons que $\mathbb{P}(A_I) = 0$ *ou* 1.

Notons $\mathcal{F}_n = \sigma(U_n, U_{n+1}, ...)$ et $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ la tribu asymptotique des $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \geqslant n \geqslant 0$, la fonction $\omega \mapsto f_\omega^{(k)}(\frac{a}{2})$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable en tant que limite simple de telles fonctions (elle ne dépend pas des premiers termes !). Il s'ensuit que

$$\omega \mapsto \sup_{k\geqslant n} \left| \frac{f_\omega^{(k)}(\frac{a}{2})}{k!} \right|^{1/k}$$

est également $\mathcal{F}_n$-mesurable comme sup de telles fonctions, puis que

$$\omega \mapsto \limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(\frac{a}{2})}{n!} \right|^{1/n}$$

est $\mathcal{F}_n$-mesurable comme limite simple de telles fonctions. Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 0$, cette dernière fonction est donc $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Ceci montre que A_I est intersection dénombrable d'évènements tous dans la tribu asymptotique, de sorte que $A_I \in \mathcal{F}_\infty$. Or, on a supposé les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants, de sorte que par loi du 0-1 de Kolmogorov, la tribu asymptotique est triviale, et donc $\mathbb{P}(A_I) = 0$ ou 1.

Étape 4. Montrons que $\mathbb{P}(A_I) = 0$.

Soit $\theta \in \mathbb{Q}$ et $J = e^{i\theta} I \in \mathcal{C}$ un arc de cercle de même longueur que I. Soit $V_n = e^{-in\theta} U_n$. Alors V_n est uniformément distribuée sur $\mathbb{S}^1$ et les points de I sont réguliers pour $\sum a_n U_n z^n$ si et seulement si les points de J le sont pour $\sum a_n V_n z^n$. Ainsi, $\mathbb{P}(A_I) = \mathbb{P}(A_J)$.

Par l'absurde, supposons $\mathbb{P}(A_I) = 1$. Alors il existe $I_1, ..., I_n$ dans $\mathcal{C}$ des arcs de cercles de même longueur que I et tels que $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=1}^n I_k$. On a alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_{I_k} \right) = 1 \text{ et } \bigcap_{k=1}^n A_{I_k} = A_{\bigcup_{k=1}^n I_k} = A_{\mathbb{S}^1}$$

ce qui donne $\mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}) = 1$. Pour $\lambda \in]0,1[$, notons

$$A_I(\lambda) = \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall a \in I_\mathbb{Q},\ \limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(\frac{a}{2})}{n!} \right|^{1/n} \leqslant 2\lambda \right\}.$$

On montre, avec les mêmes arguments que pour A_I, que $A_I(\lambda)$ est un évènement dans la tribu asymptotique. Par continuité croissante, on

$$1 = \mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}) = \lim_{\lambda\to 1^-} \mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}(\lambda)).$$

Or, $\mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}(\lambda)) = 0$ ou 1, donc il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}(\lambda)) = 1$. Cela signifie que pour tout $a \in \mathbb{S}^1_\mathbb{Q}$, f_ω se prolonge holomorphiquement à $B(\frac{a}{2}, \frac{1}{2\lambda})$ avec $\frac{1}{2\lambda} > \frac{1}{2}$, et donc en particulier tous les points de $\mathbb{S}^1_\mathbb{Q}$ sont réguliers. De plus, les boules $B(\frac{a}{2}, \frac{1}{2\lambda})$ pour $a \in \mathbb{S}^1_\mathbb{Q}$ forment un recouvrement de

$\mathbb{S}^1$. Ainsi, pour $a \in \mathbb{S}^1$ quelconque, il existe $b \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$ tel que $B(\frac{b}{2}, \frac{1}{2\lambda})$ soit un voisinage ouvert de a. Puisque f se prolonge holomorphiquement sur ce voisinage, alors a est régulier.

En définitive, s'il existe $I \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbb{P}(A_I) = 1$, alors pour tout $\omega \in A_I$ (c'est-à-dire pour presque tout ω) tous les points de $\mathbb{S}^1$ sont réguliers pour f_ω, ce qui est absurde car il existe toujours un point singulier sur le bord du disque de convergence. Ainsi, $\mathbb{P}(A_{\mathbb{S}^1}) = 0$ pour tout $I \in \mathcal{C}$, et donc $\mathbb{P}(B) = 0$. $\square$

▷ **Références.** Il y a plusieurs références possibles : des bonnes ou des mauvaises. La démonstration présentée ici reprend plus ou moins celle de [QZ13], qui constitue la mauvaise référence. Je n'aime pas le style du livre en général, et en particulier il semblerait que les auteurs aient décidé de ne pas montrer que A_I est un évènement asymptotique, mais seulement de l'affirmer (ils ont peut-être raison, mais moi ça ne m'a pas convaincu ; si vous avez des explications à m'apporter je suis preneur !). J'ai donc modifié un peu la démonstration (en espérant que ce soit correct) en m'inspirant fortement du travail de Théo Untrau (document déjà cité), lui-même tiré de [GK19], qui constitue semble-il une meilleure référence.

[GK19] Olivier Garet et Aline Kurtzmann : *De l'intégration aux probabilités.* Ellipses, 2019.

[Hau07] Bertrand Hauchecorne : *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses, 2007.

[QZ13] Hervé Queffélec et Claude Zuily : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2013.