Exercices de colles pour MP/MP*

Ce document regroupe les différents exercices que j'ai mis sur mes feuilles de colles pour les MP1 et MP* du lycée Chateaubriand de Rennes, en 2020-2021. Ils s'accompagnent tous d'une correction, qui n'est pas garantie sans coquilles ni fautes plus graves. Tous ces exercices n'ont pas été donnés. Certains sont très faciles et d'autres probablement trop durs ; il y a des exercices classiques et des plus originaux ; certains sont intéressants et d'autres beaucoup plus barbants. Bref, il y a un peu de tout ! Certains exercices ont aussi été posés sous une forme différente de celle présentée ici, avec plus ou moins de détails et de questions intermédiaires.

J'ai pris ces exercices de diverses sources. Il y a des livres pour prépa : les Gourdon, l'Ellipse (le gros jaune), les Oraux X-ENS de chez Cassini,... Il y a les cours et TD issus de ma propre scolarité. Certains exercices proviennent d'internet (ressource inépuisable), par exemple du document rédigé par Théo Untrau (et disponible sur sa page). Enfin, d'autres sont bricolés de toutes pièces pour les besoins du scénario.

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur plus grave !

Table des matières

1 Structures algébriques

1.1 Groupes

Exercice 1.1.

1. Déterminer tous les morphismes de groupes $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$. Lesquels sont injectifs ? Surjectifs ?
2. Mêmes questions avec $(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$.

Solution. 1. Notons $d = \varphi(1)$. Comme c'est un morphisme, on a forcément $\varphi(n) = nd$ pour $n \geqslant 0$, puis $\varphi(n) = nd$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Un endomorphisme de $\mathbb{Z}$ est donc une multiplication par un entier (c'est bien un morphisme). Il est injectif si $d \neq 0$ et surjectif si $d = \pm 1$.

2. Notons $d = \varphi(1)$. Comme précédemment, on a $\varphi(n) = nd$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, $d = \varphi(1) = n\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{d}{n}$. Or φ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc $\dfrac{d}{n} \in \mathbb{Z}$. Ceci étant pour tout n, on a $d = 0$ donc $\varphi = 0$.

$\square$

Exercice 1.2 (Automorphismes intérieurs).
Soit G un groupe. Pour $g \in G$ on définit $\varphi_g \left| \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array} \right.$. Montrer que $\varphi \left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array} \right.$ est bien défini et est un morphisme de groupes. En déduire que $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G,\ gx = xg\}$ (le centre de G) est un sous-groupe de G.

Solution. Il suffit simplement de vérifier. Le centre de G correspond au noyau de φ. $\square$

Exercice 1.3 (Caractères d'un groupe abélien).
Soit G un groupe abélien fini, on note sa loi multiplicativement. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$, un élément $\varphi \in \widehat{G}$ s'appelle un caractère de G.

1. Soit $\varphi \in \widehat{G}$. Calculer $\displaystyle\sum_{x \in G} \varphi(x)$.
2. Soit $x \in G$, $x \neq 1$. On va montrer qu'il existe un caractère ψ de G tel que $\psi(x) \neq 1$.
   (a) Construire un caractère ψ de $\langle x \rangle$ tel que $\psi(x) \neq 1$.
   (b) Soit G' le plus grand sous-groupe sur lequel se prolonge ψ. Si $G' \neq G$, soit $y \in G \setminus G'$. Montrer que $\{k \in \mathbb{Z} \mid y^k \in G'\} \neq \{0\}$.
   (c) Soit G'' le groupe engendré par G' et y. Montrer qu'on peut prolonger ψ à G''. Conclure.
3. Soit $x \in G$. Calculer $\displaystyle\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \varphi(x)$.

Solution. 1. Si φ est constant égal à 1, la somme vaut $|G|$. Sinon, il existe $a \in G$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. On constate que la multiplication par a est une bijection de G. On a donc

$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{x \in G} \varphi(ax) = \sum_{x \in G} \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \sum_{x \in G} \varphi(x)$$

car φ est un morphisme. Comme $\varphi(a) \neq 1$, cela implique $\displaystyle\sum_{x \in G} \varphi(x) = 0$.

2. (a) On prend $\psi(x) = e^{2i\pi/m}$ avec m l'ordre de x.
   (b) L'ordre de G est dans cet ensemble, qui est donc de la forme $n\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $\mathbb{Z}$) avec $n \neq 0$.
   (c) Soit $w = y^k z \in G''$, avec $z \in G'$. Comme $y^n \in G'$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\psi(y^n) = \lambda^n$. Posons $\psi'(w) = \psi'(y^k z) = \lambda^k \psi(z)$. Montrons que c'est bien défini.

Si $y^k z = y^{k'} z'$, alors $y^{k-k'} \in G'$ donc $k - k' = qn$. Alors

$$\lambda^k \psi(z) = \lambda^{k'} \lambda^{qn} \psi(z) = \lambda^{k'} \psi(y^n)^q \psi(z) = \lambda^{k'} \psi(y^{qn} z) = \lambda^{k'} \psi(z')$$

donc c'est bien défini. On vérifie que c'est un morphisme qui prolonge ψ à G'', ce qui est absurde. Donc $G' = G$ et ok.

3. Si $x = 1$, la somme vaut $|\widehat{G}|$. Sinon, la multiplication par ψ est une bijection de $\widehat{G}$ donc

$$\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \varphi(x) = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} (\psi\varphi)(x) = \psi(x) \sum_{\varphi \in \widehat{G}} \varphi(x)$$

Or pour $x \neq 1$ il existe $\psi \in \widehat{G}$ tel que $\psi(x) \neq 1$, donc $\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \varphi(x) = 0$.

□

Exercice 1.4.

1. Soit G un groupe de cardinal pair. Montrer que G contient un nombre impair d'éléments d'ordre 2.
2. En déduire, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 4.

Solution. 1. On apparie chaque $x \in G$ avec son inverse : $E_x = E_{x^{-1}} = \{x, x^{-1}\}$. On obtient une partition de G en union disjointe $\sqcup_i E_{x_i}$. Or, les E_x sont de cardinal 2, sauf si $x = 1$ ou si x est d'ordre 2. Il y a donc nécessairement un nombre impair d'éléments d'ordre 2.

2. Soit G d'ordre 4, ses éléments (différents de l'unité) sont d'ordre 2 ou 4 par théorème de Lagrange. Si G a un seul élément d'ordre 2, alors il a un élément d'ordre 4 donc est cyclique, donc $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. S'il a 3 éléments d'ordre 2, alors $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

□

Exercice 1.5.

Soit $G_1, ..., G_n$ des groupes cycliques d'ordre d_i, et $G = G_1 \times ... \times G_n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que G soit cyclique.

Solution. Si G est cyclique, il existe $x = (x_1, ..., x_n)$ qui engendre G. On voit que x_i engendre G_i donc x_i est d'ordre d_i. L'ordre de x est donc $\text{ppcm}(d_i)$ (facile à montrer). Or cet ordre est $|G| = d_1...d_n$ par hypothèse sur G, donc les d_i sont premiers entre eux deux à deux.

Réciproquement, si les d_i sont premiers entre eux deux à deux, soit x_i qui engendre G_i et $x = (x_1, ..., x_n)$. Alors x est d'ordre $\text{ppcm}(d_i) = d_1...d_n$ donc x engendre G. □

1.2 Anneaux, idéaux, arithmétique

Exercice 1.6 (Anneau de Boole).
Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que pour tout $a \in A$, $a^2 = a$.

1. Montrer que $2a = 0$ pour tout $a \in A$, puis que A est commutatif.
2. Soit $(a, b) \in A^2$. Calculer $ab(a+b)$. En déduire que si $|A| \geqslant 3$, alors A n'est pas intègre.
3. Peut-on avoir $|A| = 2$? $|A| = 3$?

Solution.

1. On calcule $2a = (2a)^2 = 4a^2 = 4a$ donc $2a = 0$ c'est-à-dire $a = -a$. Puis on calcule $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$ donc $ab = -ba = ba$.
2. On a $ab(a + b) = a^2b + ab^2 = ab + ab = 0$ car A est commutatif. Si A contient au moins trois éléments 0, a et b, alors : si $ab = 0$ alors A n'est pas intègre ; sinon puisque $a + b \neq 0$ (sinon $a = b$ par ce qui précède) alors A n'est pas intègre..
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ convient.
   Si $A = \{0, 1, a\}$, alors $1 + a$ ne peut pas valoir 0 (sinon $a = 1$), ni 1 (sinon $a = 0$), ni a (sinon $1 = 0$). Donc A ne peut pas être de cardinal 3.

□

Exercice 1.7 (Des anneaux qui sont des corps).

1. Soit A un anneau commutatif, intègre et fini. Montrer que A est un corps.
2. Soit A un anneau commutatif dont les seuls idéaux sont $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps. Est-ce une équivalence ?
3. Soit A un anneau commutatif, intègre et ayant un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.

Solution.

1. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. Montrons que a est inversible. Considérons la multiplication par a : $x \mapsto ax$. C'est une application injective car A est intègre. Comme A est fini, elle est aussi surjective. Donc il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$.
2. Si $a \neq 0$, alors $\langle a \rangle = A$ donc il existe b tel que $ab = 1$, c'est-à-dire a est inversible donc A est un corps. La réciproque est vraie : si I est un idéal non-nul d'un corps k, alors il contient un élément inversible donc $I = k$.
3. Soit $a \neq 0$ et $I_n = \langle a^n \rangle$. Il existe $m > n$ tel que $I_m = I_n$, donc il existe x tel que $a^n = a^m x$. Alors $a^n(1 - a^{m-n}x) = 0$ et par intégrité on a $a^{m-n}x = 1$, donc a est inversible.

□

Exercice 1.8.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Notons $\varphi(a + b\sqrt{n}) = a - b\sqrt{n}$, et $N(x) = x\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Montrer que :
   (a) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(b) N est multiplicative,

(c) x inversible $\Leftrightarrow N(x) = \pm 1$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ contient une infinité d'inversibles.

Solution. Il s'agit de vérifier les définitions. Pour 2.(c), noter que N est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour 3., remarquer que $x = 2 + \sqrt{5}$ est inversible. Comme $|x| > 1$, les x^n sont tous différents et inversibles. $\square$

Exercice 1.9.

Notons A l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que A est un anneau commutatif unitaire. Est-il intègre ? Déterminer $A^\times$.
2. Soit $X \subset [0, 1]$ et $I(X) = \{f \in A \mid f = 0 \text{ sur } X\}$. Montrer que $I(X)$ est un idéal de A.
3. Si $X = \{x\}$ est un singleton, montrer que $I(x)$ est un idéal maximal (c'est-à-dire $I(x) \neq A$ et si J et un idéal contenant strictement $I(x)$, alors $J = A$).

Solution.

1. Les lois considérées sont l'addition et la multiplication de fonctions. L'anneau n'est pas intègre. Les inversibles sont les fonctions qui ne s'annulent pas.
2. Vérifier la définition d'un idéal.
3. Il existe des fonctions qui ne s'annule pas en x, donc $I(x) \neq A$. Soit J un idéal contenant strictement $I(x)$. Il existe $f \in J$ qui ne s'annule pas en x. Alors $f - f(x) \in I(x) \subset J$. Donc $-f(x) = (f - f(x)) - f \in J$. Donc J contient la fonction constante égale à $f(x)$; cette fonction est inversible car $f(x) \neq 0$. Donc $J = A$.

$\square$

Exercice 1.10 (Radical d'un idéal).

Soit A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Le radical de I est l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
3. Déterminer $\sqrt{I}$ si $A = \mathbb{Z}$.

Solution.

1. D'une part $0 \in \sqrt{I}$. D'autre part, si $x, y \in \sqrt{I}$, on dispose de $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x^n, y^m \in I$. Comme A est commutatif, la formule du binôme de Newton donne
$$(x + y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}.$$
On remarque que pour chaque terme, soit on a $k \geqslant n$, soit on a $n + m - k \geqslant m$. Donc chaque terme est dans I, donc la somme aussi et $x + y \in \sqrt{I}$. Enfin, $(ax)^n = a^n x^n \in I$ pour $a \in A$ et $x \in \sqrt{I}$ (car A est commutatif), c'est-à-dire $ax \in \sqrt{I}$.

2. Si $x^n \in IJ$ alors $x^n = \sum a_k b_k$ avec $a_k \in I$ et $b_k \in J$. Donc $x^n \in I \cap J$.
   Si $x^n \in I \cap J$ alors $x^n \in I$ et $x^n \in J$.
   Si $x^n \in I$ et $x^m \in J$ alors $x^{n+m} \in IJ$.
3. Comme $\mathbb{Z}$ est principal, I est de la forme $n\mathbb{Z}$. Notons $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers, et montrons que $\sqrt{I} = p_1 ... p_k \mathbb{Z}$. Si $x^m \in I$, alors n divise x^m donc les p_i divisent tous x^m, donc aussi x. Comme ils sont premiers entre eux, leur produit divise x et $x \in p_1 ... p_k \mathbb{Z}$. La réciproque est claire.

□

Exercice 1.11 (Anneau noethérien (Emmy Noether)).

1. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Montrer qu'elle est stationnaire.
2. Un anneau A est noethérien si tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer qu'un anneau A est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire. Donner des exemples d'anneaux noethériens.

Solution. 1. Si la suite est constante à $\{0\}$, elle stationne. Sinon, il existe P_n unitaire tel que $I_n = \langle P_n \rangle$. Par hypothèse de croissance, on a P_{n+1} divise P_n. La suite $(\deg(P_n))_n$ est donc une suite d'entiers décroissante, donc elle stationne à partir d'un rang n_0. Pour $n \geqslant n_0$, on a P_{n+1} et P_n de même degré et unitaire, et l'un divise l'autre. Donc $P_n = P_{n+1}$.

2. Soit A noethérien et soit $(I_n)_n$ une suite croissante d'idéaux. Alors $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un idéal de A (facile) donc on peut écrire $I = \langle a_1, ..., a_N \rangle$. Par définition de I, pour tout k il existe n_k tel que $a_k \in I_{n_k}$. Soit $n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} n_k$. Alors par croissance de la suite, $a_k \in I_n$ donc $I \subset I_n$ donc $I = I_n$, et la suite stationne a I_n.
   Réciproquement, soit I un idéal de A. Soit $a_1 \in I$ et $I_1 = \langle a_1 \rangle$. Si $I_1 = I$ c'est ok, sinon on prend $a_2 \in I \setminus I_1$ et on pose $I_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$. On construit ainsi par récurrence une suite croissante d'idéaux $(I_n)_n$, telle que $I_n \subset I$. Par hypothèse cette suite stationne, disons à I_k. Alors $I_k = I$, sinon on pourrait prendre $a_{k+1} \in I \setminus I_k$ et construire I_{k+1}, qui contiendrait strictement I_k et contredirait le choix de k. Ainsi, $I = I_k = \langle a_1, ..., a_k \rangle$.
   D'après la première question, $\mathbb{K}[X]$ est noethérien. En fait, tout anneau principal ($\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ par exemple) est noethérien. Un exemple d'anneau noethérien mais pas principal est $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ (dur et hors-programme).

□

Exercice 1.12.

Déterminer les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. Soit I un idéal non-nul, il contient une matrice A de rang $r > 0$. La matrice A est équivalente à J_r donc $J_r \in I$. Or, les 1 de la diagonale de J_r peuvent en réalité être mis n'importe où sur la diagonale (en multipliant à gauche et à droite par une matrice de permutation). Pour chaque i, il existe donc dans I une matrice qui a un 1 en position (i, i), des 0 ou 1 sur le reste de la diagonale, et des 0 ailleurs. En additionnant toutes ces matrices, on trouve une matrice diagonale avec des coefficients non-nuls sur la diagonale. Cette matrice est donc inversible, et elle appartient à I. Donc $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Exercice 1.13 (Un des nombreux résultats appelés "lemme de Gauss").
Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, son contenu $c(P)$ est le pgcd de ses coefficients. On dit que P est primitif si $c(P) = 1$.

1. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Si P et Q sont primitifs, montrer que PQ est primitif.
   (b) (Lemme de Gauss) Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Voici maintenant quelques applications.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires. Si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer que P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Le lemme de Gauss permet aussi, via la question 3, de montrer des critères d'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ de polynômes à coefficients entiers : les critères d'Eisenstein et de réduction modulo p (qui pourraient faire l'objet d'un exercice !).

Solution. 1. (a) Soit p un nombre premier tel que p divise $c(PQ)$. Alors dans $\mathbb{F}_p[X]$ on a $PQ = 0$, et comme $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre cela implique P ou $Q = 0$ (dans $\mathbb{F}_p[X]$). Donc p divise $c(P)$ ou $c(Q)$, ce qui est absurde. Donc $c(PQ) = 1$.

(b) Soit $P_1 = \dfrac{1}{c(P)}P$ et $Q_1 = \dfrac{1}{c(Q)}Q$. Alors P_1 et Q_1 sont primitifs, donc P_1Q_1 aussi. Comme $c(\lambda P) = \lambda c(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$c(PQ) = c(c(P)c(Q)P_1Q_1) = c(P)c(Q)c(P_1Q_1) = c(P)c(Q).$$

2. Soit a et b les plus petits entiers tels que $aP, bQ \in \mathbb{Z}[X]$ (a est le ppcm des dénominateurs des coefficients de P, idem pour b). Il s'agit de montrer que $a = b = 1$. On a

$$c(aP)c(bQ) = c(aPbQ) = abc(PQ) = ab$$

car PQ est unitaire donc $c(PQ) = 1$. Comme a est le coefficient dominant de aP (car P est unitaire) et b celui de bQ, alors $c(aP)$ divise a et $c(bQ)$ divise b. Donc nécessairement : $c(aP) = a$ et $c(bQ) = b$. Alors $P = \dfrac{1}{a}aP = \dfrac{1}{c(aP)}aP \in \mathbb{Z}[X]$, et idem pour Q.

3. Notons encore $P_1 = \dfrac{1}{c(P)}P$. Écrivons $P_1 = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ non-constants. Soit a et b des entiers tels que $aQ, bR \in \mathbb{Z}[X]$. Alors $abP_1 = aQbR$ et P_1 est primitif, donc $ab = c(aQ)c(bR)$ (avec le lemme de Gauss). Finalement,

$$P = c(P)P_1 = \frac{c(P)}{ab}aQbR = \frac{c(P)}{c(aQ)}aQ \times \frac{1}{c(bR)}bR,$$

et ces facteurs sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

□

Exercice 1.14.
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine rationnelle de P est entière (on dit que $\mathbb{Z}$ est normal dans $\mathbb{Q}$). En déduire que les racines n-ème des entiers sont entières ou irrationnelles.

Solution. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ racine de P, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. En multipliant l'équation $P(r) = 0$ par q^n, on obtient

$$p^n = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k-1}$$

et donc q divise p. Comme p et q sont premiers entre eux, alors $q = 1$ et $r = p \in \mathbb{Z}$.

Pour les racines n-ème, on applique ce qui précède à $X^n - a$ où $a \in \mathbb{Z}$. $\square$

2 Réduction des endomorphismes

2.1 Algèbre linéaire

Exercice 2.1.
On note E l'ensemble des fonctions $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[-1, 1]$, et affines sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Déterminer une base de E.

Solution. Une fonction $f \in E$ est déterminée par ses valeurs en -1, 0 et 1. Elle s'écrit $f(x) = ax+b$ sur $[-1, 0]$ et $f(x) = cx + b$ sur $[0, 1]$. Ainsi, elle est déterminée par 3 paramètres, et on a $\dim(E) = 3$. Pour le montrer, trouvons une base.

Soit $f_1(x) = \min(0, x)$, $f_2(x) = \max(0, x)$ et $f_3(x) = 1$. On a $f_i \in E$, on avec l'écriture de f ci-dessus, on a $f = af_1 + cf_2 + bf_3$. Donc (f_1, f_2, f_3) est génératrice. Elle est libre, car si $af_1 + cf_2 + bf_3 = 0$, alors les évaluation en -1, 0 et 1 donne $a = b = c = 0$. $\square$

Exercice 2.2.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout i, on ait $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.

Solution. On suppose que les colonnes sont liées : $\sum_j \lambda_j C_j = 0$, c'est-à-dire pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$: $\sum_j \lambda_j a_{i,j} = 0$. Soit k tel que $|\lambda_k| = \max_j |\lambda_j|$. Supposons $|\lambda_k| > 0$. Alors on a pour $i = k$: $a_{k,k} = -\displaystyle\sum_{j\neq k} \frac{\lambda_j}{\lambda_k} a_{k,j}$. Donc $|a_{k,k}| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq k} |a_{k,j}|$ ce qui contredit les hypothèses. Donc $\lambda_k = 0$ et tous les λ_j sont nuls. $\square$

Exercice 2.3.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille $(e_1, ..., e_p)$ est dite positivement génératrice si pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que $x = \sum \lambda_i e_i$.

1. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille positivement génératrice. Montrer que $p \geqslant n+1$. Peut-on avoir $p = n+1$?
2. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice telle qu'il existe une relation $\sum \lambda_i e_i = 0$ avec $\lambda_i > 0$. Montre que $(e_1, ..., e_p)$ est positivement génératrice.
3. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille positivement génératrice, avec $p \geqslant 2n+1$. Montrer qu'il existe une sous-famille (stricte) de $(e_1, ..., e_p)$ qui est positivement génératrice.
4. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $2n$ dont on ne peut extraire aucune sous-famille stricte positivement génératrice.

Solution.

1. On a $p \geqslant n$ car la famille est génératrice. Si $p = n$ alors la famille est une base, et le vecteur $-e_1$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs des $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $p \geqslant n+1$.
   Si $(f_1, ..., f_n)$ est une base de E, alors $(f_1, ..., f_n, -\sum f_i)$ est positivement génératrice. En effet, pour $x \in E$, on peut écrire $x = \sum x_i f_i$. Pour t réel, on a $x = \sum (x_i + t) f_i + t(-\sum f_i)$. En prenant $t > \max(x_i)$, on obtient x comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de $(f_1, ..., f_n, -\sum f_i)$.
2. Idem, $x = \sum x_i e_i = \sum (x_i + t\lambda_i) e_i$ pour tout réel t.
3. On extrait de la famille une base de E. On note I l'ensemble des indices associés et J son complémentaire. La famille $(e_j)_{j \in J}$ est liée (car de cardinal $n+1$) donc on peut écrire $\sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0$. De plus, comme la famille totale est positivement génératrice, on peut écrire $\sum \mu_i e_i = 0$ avec $\mu_i > 0$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$:
   $$\sum_{i \in I} \mu_i e_i + \sum_{j \in J} (\mu_j + t\lambda_j) e_j = 0.$$
   En prenant $t = -\frac{\mu_k}{\lambda_k}$ avec $k \in$ tel que $\lambda_k \neq 0$ et tel que la valeur absolue de t soit minimale, les $\mu_j + t\lambda_j$ sont $\geqslant 0$. Si $K = \{j \in J \mid \mu_j + t\lambda_j > 0\}$, alors $k \notin K$ donc K est strict dans J et ok, car $\displaystyle\sum_{i \in I} \mu_i e_i + \sum_{j \in K} (\mu_j + t\lambda_j) e_j = 0$ et par la question 2.
4. Prendre une base (f_i) de E et la famille $(f_i, -f_i)$.

□

Exercice 2.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Solution. La réciproque est évidente, montrons le sens direct. Par récurrence sur n, si $n = 1$ c'est ok ($\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$...). Supposons que ce soit ok pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle. Si $A = 0$, ok. Sinon, soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Comme u n'est pas une homothétie (sinon $u = 0$ et $A = 0$), il existe x tel que $(x, u(x))$ soit libre. On complète cette famille en une base $(x, u(x), e_3, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Par récurrence, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que PBP^{-1} ait une diagonale nulle. Avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, on a $QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & PBP^{-1} & \\ \star & & & \end{pmatrix}$, et cette matrice a une diagonale nulle. □

Exercice 2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non-scalaire. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale $(a_1, ..., a_n)$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = a_1 + ... + a_n$.

Solution. Faisons la réciproque par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est ok. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$. Soit $(a_1, ..., a_n)$ tel que $\mathrm{tr}(A) = a_1 + ... + a_n$. Notons $B = A - a_1 I_n$. Comme A n'est pas scalaire alors B non plus, donc il existe x tel qu'on ait une base $(x, Bx, e_3, ..., e_n)$. Par changement de base, A est semblable à $\begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & \\ 0 & & A' & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{tr}(A') = a_2 + ... + a_n$, et on conclut par récurrence si A' n'est pas scalaire.

Si $A' = \lambda I_{n-1}$ est scalaire, on change e_3 en $e_3 + x$, et alors A' a des λ sur la diagonale et un 1 en position (1,2), donc n'est pas scalaire, et on conclut. □

Exercice 2.6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$E = \mathrm{im}(u) \oplus \ker(u) \Leftrightarrow \mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u^2).$$

Est-ce encore vrai si E est de dimension infinie ?

Solution. On a toujours $\mathrm{im}(u^2) \subset \mathrm{im}(u)$. Soit $y = u(x) \in \mathrm{im}(u)$, on écrit $x = z + w$ avec $z = u(x') \in \mathrm{im}(u)$ et $w \in \ker(u)$. Alors $y = u(z) = u^2(x')$ donc ok.

Réciproquement, si $x \in E$ alors il existe $x' \in E$ tel que $u(x) = u^2(x')$. Donc $u(x - u(x')) = 0$, c'est-à-dire $x - u(x') \in \ker(u)$. Donc $x = u(x') + (x - u(x')) \in \mathrm{im}(u) + \ker(u)$, et comme par théorème du rang on a $\dim(\mathrm{im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$, c'est ok.

En dimension infinie c'est faux. Avec $u : P \mapsto P'$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u^2) = \mathbb{R}[X]$, mais $\ker(u) = \mathbb{R} \neq \{0\}$. □

Exercice 2.7 (Centre de GL(E)).
Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que f commute avec tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ si et seulement si f est une homothétie.

Solution.

1. La condition nécessaire est immédiate. Réciproquement, supposons que pour tout x il existe λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Fixons v un vecteur non nul, et soit $x \in E$. Si $x \in \mathbb{K}v$, alors $x = \mu v$ et $f(x) = \lambda_x x = f(\mu v) = \mu\lambda_v v = \lambda_v x$ donc $\lambda_x = \lambda_v$. Sinon, (x, v) est une famille libre, donc $\lambda_{x+v}(x+v) = \lambda_x x + \lambda_v v$ impose $\lambda_x = \lambda_{x+v} = \lambda_v$.
2. Supposons que pour tout $g \in \mathrm{GL}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. Si f n'est pas une homothétie, il existe $u \in E$ tel que $(u, f(u))$ soit libre. On complète cette famille en une base $(u, f(u), e_3, ..., e_n)$ de E. Soit $g \in \mathrm{GL}(E)$ donné par $g(u) = u$, $g(f(u)) = u + f(u)$ et $g(e_i) = e_i$. Alors $g(f(u)) = u + f(u)$ mais $f(g(u)) = f(u)$, donc f et g ne commutent pas, ce qui est absurde. La réciproque est évidente.

□

Exercice 2.8.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que u est nilpotent d'indice r, c'est-à-dire $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$. Montrer que $r \leqslant n$.

Solution. Soit $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$. Montrons que $(x, u(x), ..., u^{r-1}(x))$ est une famille libre. Soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ une relation de dépendance linéaire. On applique u^{r-1} à cette relation, ce qui donne $\lambda_0 u^{r-1}(x) = 0$ (les autres termes s'annulent car $u^r = 0$), donc $\lambda_0 = 0$ car $u^{r-1}(x) \neq 0$. On recommence en appliquant u^{r-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$, puis... on applique u^{r-1-k} pour montrer que $\lambda_k = 0$.

Bref, $(x, u(x), ..., u^{r-1}(x))$ est une famille libre dans un espace de dimension n, donc nécessairement on a $r \leqslant n$. □

Exercice 2.9 (Sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension 3. On suppose que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Solution. Soit $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$. On vérifie que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de E. Dans cette base, la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit F un sev stable par u. Si $\dim(F) = 1$, alors $F = \mathbb{K}v$ et il existe λ tel que $u(v) = \lambda x$. Avec la matrice A, on voit que $\lambda = 0$, donc $u(v) = 0$ et donc $F \subset \ker(u)$, et $F = \ker(u)$ (on voit facilement que u est de rang 2).

Si $\dim(F) = 2$, soit $ax + by + cz = 0$ une équation de F. Soit $X = (x, y, z) \in F$, alors $u(X) = (y, z, 0) \in F$ donc $ay + bz = 0$. Comme $u^2(X) = (z, 0, 0) \in F$, alors $az = 0$. Si $a \neq 0$, alors $z = 0$, puis $y = 0$ puis $x = 0$ donc $F = \{0\}$: absurde. Donc $a = 0$. Si $b \neq 0$, on trouve $y = z = 0$ donc F de dimension 1 : absurde. Donc $b = 0$. Alors nécessairement $c \neq 0$ et alors F est donné par $z = 0$, càd $F = \mathrm{im}(u)$.

Donc les seuls sous-espaces stables par u sont $\{0\}$, $\ker(u)$, $\mathrm{im}(u)$ et $\mathbb{K}^3$. □

Exercice 2.10.
Soit $A_1, ..., A_n$ des matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant deux à deux. Montrer que $A_1...A_n = 0$.

Solution. Soit $F_{k+1} = \mathrm{Im}(A_{k+1}...A_n)$. Alors F_{k+1} est stable par A_k, car les matrices commutent. Si $F_{k+1} = \{0\}$ c'est ok. Sinon, en notant u_k l'endomorphisme associé à A_k, u_k restreint à F_{k+1} n'est pas bijectif, car nilpotent. Donc $u(F_{k+1}) \subsetneq F_{k+1}$, càd $F_k \subsetneq F_{k+1}$. La suite $(\dim(F_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers, majorée par $n-1$ car $\mathrm{rg}(A_n) < n$. Son premier terme est donc forcément nul, càd $\mathrm{rg}(A_1...A_n) = 0$ donc $A_1...A_n = 0$. □

Exercice 2.11.
Résoudre l'équation $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution. Si A est solution, on calcule $A^6 = 0$, donc A est nilpotente. On devrait alors avoir $A^3 = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc il n'y a pas de solution.

□

Exercice 2.12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension quelconque). Soit $f_1, ..., f_r$ et g des formes linéaires sur E. Montrer : $g \in \mathrm{vect}(f_1, ..., f_r) \Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker(f_i) \subset \ker(g)$.

Solution. Un sens est facile. Pour l'autre, on fait une récurrence sur r. Pour $r = 1$, ok. Supposons que c'est vrai pour r, et supposons $\bigcap_{i=1}^{r+1} \ker(f_i) \subset \ker(g)$. Si $f_{r+1} = 0$ c'est bon. Sinon, on considère g' la restriction de g à $\ker(f_{r+1})$ (et idem f_i'). On a $\bigcap_{i=1}^{r} \ker(f_i') \subset \ker(g')$ donc par récurrence $g' = \sum\limits_{i=0}^{r} \lambda_i f_i'$. Alors $g - \sum\limits_{i=0}^{r} \lambda_i f_i$ est nulle sur $\ker(f_{r+1})$ donc (par le cas $r = 1$) on a $g - \sum\limits_{i=0}^{r} \lambda_i f_i = \lambda_{r+1} f_{r+1}$. □

2.2 Éléments propres

Exercice 2.13.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer le spectre de AB et celui de BA.

Solution. Si $ABx = \lambda x$, alors $BA(Bx) = \lambda Bx$. Si $Bx \neq 0$, c'est un vecteur propre de BA pour la valeur propre λ, donc λ est dans le spectre de BA. Si $Bx = 0$, alors $\lambda x = 0$ donc $\lambda = 0$ car $x \neq 0$. Donc 0 est valeur propre de AB, donc $\det(AB) = 0$, donc $\det(BA) = 0$ donc $0 = \lambda$ est valeur propre de BA. Finalement, le spectre de AB est inclus dans celui de BA, et l'autre inclusion se montre de la même façon. □

Exercice 2.14.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de B en fonction de ceux de A.

Solution. Si λ est valeur propre de B avec (x, y) en vecteur propre, alors on a $y = \lambda x$ et $Ax = \lambda y$. Alors $x \neq 0$ sinon $(x, y) = (0, 0)$. De plus, $Ax = \lambda^2 x$, càd x est vecteur propre de A pour la valeur propre λ^2.

Réciproquement, soit μ une valeur propre de A, notons $\lambda = \mu^{1/2}$ une racine (complexe) de μ. Soit x un vecteur propre associé.

Si $\mu = 0$ alors $B(x, 0) = 0$ donc 0 est aussi valeur propre de B, associée à $(x, 0)$.

Sinon, $\mu \neq 0$, et alors $B(x, \lambda x) = (\lambda x, \mu x) = \lambda(x, \lambda x)$, donc $(x, \lambda x)$ est vecteur propre de B associé à $\lambda = \mu^{1/2}$. De même, $B(x, -\lambda x) = (-\lambda x, \mu x) = -\lambda(x, -\lambda x)$, donc $(x, -\lambda x)$ est vecteur propre de B associé à $-\lambda = -\mu^{1/2}$. □

Exercice 2.15.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = ... = \mathrm{tr}(A^n) = 0$. Que dire du spectre de A ? Que dire de A ? Est-ce une équivalence ?

Solution. Montrons que toutes les valeurs propres de A sont nulles. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres non-nulles et distinctes de A, de multiplicités (en tant que racines) $m_1, ..., m_r$. La condition s'écrit : pour $1 \leqslant k \leqslant r$, on a $\sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^r = 0$. Si on note $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}$, alors $VM = 0$ donc $\det(V) = 0$. Or, par multilinéarité du déterminant on a (en faisant apparaître un déterminant de Vandermonde) : $\det(V) = \pm\lambda_1 ... \lambda_r \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$, ce qui est absurde. Donc A n'a pas de valeurs propres non-nulles et donc A est nilpotente. La réciproque est évidente. □

Exercice 2.16.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On considère u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$u(X) = X + \mathrm{tr}(AX)B.$$

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de u.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Solution. 1. On s'intéresse à l'équation $u(X) = \lambda X$, qui s'écrit $(\lambda - 1)X = \mathrm{tr}(AX)B$.

Supposons d'abord $\lambda = 1$. Alors X vérifie $\mathrm{tr}(AX) = 0$. Or, $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ est une forme linéaire (non-nulle car $\mathrm{tr}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 > 0$), donc $\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))$ est de dimension $n^2 - 1$.

De tels X existent donc. On en déduit que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1 est égal à $\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))$ donc de dimension $n^2 - 1$.

Si maintenant $\lambda \neq 1$ alors $X \in \mathbb{R}B$, donc B est lui-même vecteur propre. Or, la valeur propre associée à B est $1 + \mathrm{tr}(AB)$, donc $\lambda = 1 + \mathrm{tr}(AB)$. Réciproquement, si $X \in \mathbb{R}B$ on vérifie facilement que X est vecteur propre (si $X \neq 0$) pour $1 + \mathrm{tr}(AB)$.

Si $\mathrm{tr}(AB) = 0$, la seule valeur propre de u est donc 1, et l'espace propre est $\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))$.

Si $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$, les valeurs propres sont 1 et $1 + \mathrm{tr}(AB)$, d'espaces propres respectifs $\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))$ et $\mathbb{R}B$.

2. Si $\mathrm{tr}(AB) = 0$, l'unique espace propre $\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))$ est de dimension $n^2 - 1$ donc u n'est pas diagonalisable (s'il l'était, on aurait $u = \mathrm{id}$). Si $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$, les deux espaces propres vérifient $\dim(\ker(\mathrm{tr}(A\,\cdot))) + \dim(\mathbb{R}B) = n^2$ donc u est diagonalisable.

La condition nécessaire et suffisante est donc $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$.

□

Exercice 2.17.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Solution. Comme f est de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$ (avec $n = \dim(E)$) donc 0 est une valeur propre de f de multiplicité (comme racine de χ_f) égale au moins à $n-1$, c'est-à-dire $\chi_f = X^{n-1}(X - a)$. On a alors $\mathrm{tr}(f) = a$.

Si $a \neq 0$, alors a est une valeur propre (non-nulle) de f et on a alors $\dim(E_0) + \dim(E_a) = n$ donc f est diagonalisable.

Si $a = 0$, toutes les valeurs propres de a sont nulles. Alors f n'est pas diagonalisable, sinon elle serait elle-même nulle (ce qui contredit $\mathrm{rg}(f) = 1$).

La condition nécessaire et suffisante est donc $a = \mathrm{tr}(A) \neq 0$. □

Exercice 2.18.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

Solution. Supposons f diagonalisable. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. Soit F un sous-espace-vectoriel de E et $(e_1, ..., e_r)$ une base de F. Comme la famille libre

$(e_1, ..., e_r)$ est incluse dans la famille génératrice (de E) $(e_1, ..., e_r, v_1, ..., v_n)$, il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E coincée entre ces deux familles, c'est-à-dire que les $e_{r+1}, ..., e_n$ sont pris parmi les $v_1, ..., v_n$. Notons $G = \text{vect}(e_{r+1}, ..., e_n)$. Alors G est un supplémentaire de F et il est stable par f car les $e_{r+1}, ..., e_n$ sont des vecteurs propres de f.

Réciproquement, soit $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$, et montrons que $F = E$ ce qui impliquera que f est diagonalisable. Par l'absurde, supposons $F \subsetneq E$. Il existe alors un hyperplan H de E contenant F. Par hypothèse, H admet un supplémentaire D stable par f. Comme H est un hyperplan, D est une droite et est donc engendrée par un vecteur propre de f, ce qui est absurde. $\square$

Exercice 2.19.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes trigonalisables qui commutent.

1. Montrer que f est g admettent un vecteur propre commun.
2. Montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation pour f et g

Solution.

1. Comme f est trigonalisable elle admet une valeur propre λ. Comme f est g commutent, $\ker(f - \lambda \text{id})$ est stable par g, et la restriction de g à ce sous-espace est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé car il divise celui de g). Ainsi, cette restriction admet une valeur propre, donc un vecteur propre $x \in \ker(f - \lambda \text{id})$. Ce x est vecteur propre pour f et pour g.
2. On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$. Pour $n = 1$ il n'y a rien à faire.

   Supposons le résultat acquis pour $n - 1$. Soit x un vecteur propre commun à f et g, on le complète en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de E. Dans cette base, les matrices de f et g ont la forme $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} a & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} b & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Alors $\chi_f = (X - a)\chi_A$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable et idem pour B. Or $f \circ g = g \circ f$ implique $AB = BA$. Par récurrence, il existe $P \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient toutes deux triangulaires supérieures. Avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ on a $Q\text{Mat}(f)Q^{-1}$ et $Q\text{Mat}(f)Q^{-1}$ toutes deux triangulaires supérieures. (P correspond à une base $(e'_2, ..., e'_n)$ de $\text{vect}(e_1, ..., e_n)$ et Q correspond à la base $(x, e'_2, ..., e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$.)

$\square$

Exercice 2.20.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB - BA = A$.

1. Calculer $A^n B - BA^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A est nilpotente.

Solution. 1. On montre par récurrence que $A^nB - BA^n = nA^n$. Pour $n = 1$ c'est l'hypothèse. Pour l'hérédité, on écrit

$$\begin{aligned} A^{n+1}B - BA^{n+1} &= A(A^nB) - (BA)A^n \\ &= A(nA^n + BA^n) - (BA)A^n \\ &= nA^{n+1} + (AB - BA)A^n \\ &= (n+1)A^{n+1}. \end{aligned}$$

2. On propose deux méthodes.
   (a) On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donné par $\varphi(X) = XB - BX$. Le calcul précédent montre que pour tout $n \geqslant 1$, $\varphi(A^n) = nA^n$. Donc si $A^n \neq 0$, alors A^n est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n, ce qui montre que $n \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Or, φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, donc il a un nombre fini de valeurs propres. Donc il existe $n \geqslant 1$ tel que $A^n = 0$ (sinon on aurait $\mathbb{N}^* \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$).
   (b) On remarque que $\mathrm{tr}(A) = ... = \mathrm{tr}(A^n) = 0$ et on utilise l'exercice précédent.

□

2.3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 2.21.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u admet un polynôme minimal qu'on note π.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible dans $\mathbb{K}[u]$ si et seulement si P et π sont premiers entre eux.
2. On veut déterminer les idéaux de $\mathbb{K}[u]$.
   (a) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif. Soit J un idéal de B. Montrer que $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$ est un idéal de A. Montrer que $J = \varphi(\varphi^{-1}(J))$.
   (b) En déduire que tout idéal de de $\mathbb{K}[u]$ est principal, c'est-à-dire de la forme $\langle P(u) \rangle$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (c) Montrer qu'on peut choisir $P = 0$ ou P divise π.

Solution. 1. Supposons P et π premiers entre eux. On dispose d'une relation de Bézout $AP + B\pi = 1$, qui donne $A(u) \circ P(u) = \mathrm{id}$. Donc $P(u)$ est inversible.
Réciproquement, supposons $P(u)$ inversible, d'inverse $A(u)$. Soit $Q = P \wedge \pi$. On écrit $P = QP'$ et $\pi = Q\pi'$. On a alors $(AP'Q)(f) = (AP)(f) = \mathrm{id}$, et $0 = (AP'\pi)(f) = (AP'Q\pi')(f) = (AP'Q)(f) \circ \pi'(f) = \pi'(f)$. Donc π' est un polynôme annulateur de f. Par minimalité du degré de π, on a forcément $\deg(\pi') = \deg(\pi)$, donc Q est une constante. Donc P et π sont premiers entre eux.

2. On veut déterminer les idéaux de $\mathbb{K}[u]$.
   (a) C'est facile de montrer que $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal (et la surjectivité ne compte pas). De plus, on a toujours $\varphi(\varphi^1(J)) \subset J$ par définition. Enfin, si $b \in J$ on peut écrire $b = \varphi(a)$ par surjectivité. Alors $a \in \varphi^{-1}(J)$ donc $b \in \varphi(\varphi^1(J))$ et finalement $J = \varphi(\varphi^1(J))$.

(b) Ici, $A = \mathbb{K}[X]$, $B = \mathbb{K}[u]$ et $\varphi(P) = P(u)$. Soit J un idéal non-nul de $\mathbb{K}[u]$. Alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal non-nul de $\mathbb{K}[X]$ donc est principal : il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi^{-1}(J) = \langle P \rangle$. On a alors $J = \varphi(\langle P \rangle)) = \langle P(u) \rangle$.

(c) Si l'idéal est nul, $P = 0$ convient.
Supposons $J = \langle P(u) \rangle \neq \{0\}$. Par division euclidienne, on a $\pi = PQ + R$, avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(P)$. Montrons que $R = 0$. Comme $\pi(u) = 0$ on a $R(u) = -(PQ)(u) \in J$, donc $R \in \varphi^{-1}(J) = \langle P \rangle$. Ainsi, P divise R, ce qui n'est possible que si $R = 0$.

□

Exercice 2.22 (Matrice compagnon).
Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On lui associe la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, appelée matrice compagnon de P. Montrer que P est le polynôme minimal de C. Quel est le polynôme caractéristique de C ?

Solution. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $Ce_k = e_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et $Ce_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$. On en déduit $e_k = C^{k-1}e_1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $P(C)e_k = P(C)C^{k-1}e_1 = (X^{k-1}P)(C)e_1$. Or, on calcule $P(C)e_1 = C^n e_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k C^k e_1 = Ce_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0$. Ainsi, $P(C)$ annule les vecteurs d'une base donc $P(C) = 0$ et le polynôme minimal π de C divise P. En particulier, $\deg(\pi) \leqslant \deg(P) = n$.

Soit Q un polynôme annulateur de C, avec $\deg(Q) \leqslant n-1$. On écrit $Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. La relation $Q(C_P)e_1 = 0$ s'écrit $0 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k e_{k+1}$. Comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base, on a nécessairement $b_0 = ... = b_{n-1} = 0$ c'est-à-dire $Q = 0$.

Donc un polynôme annulateur non-nul de C est de degré au moins n. Puisque P est unitaire de degré n et annule C, alors $\pi = P$.

Comme π divise χ et qu'ils sont tous les deux unitaires de degré n, alors $\chi = \pi = P$. □

Exercice 2.23.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array}\right.$. Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, cela se récrit $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = AX_n$ et on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$. Or, on calcule $\chi_A = (X-2)(X-3)$. Ainsi, A possède un polynôme annulateur simplement scindé donc est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$. Les calculs des vecteurs propres associés à 2 et 3 donnent $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi : $\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n & = & -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{array}\right.$. □

Exercice 2.24.
Soit k un corps fini à q éléments et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$.

Solution. Soit $x \in k$. Si $x = 0$, alors $x^q = x$. Sinon, le théorème de Lagrange pour le groupe $k^\times$ donne $x^{q-1} = 1$ donc $x^q = x$. Finalement, le polynôme $P = X^q - X = \prod_{x \in k}(X - x)$ est simplement scindé sur k.

Si $P(u) = 0$ alors u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable, il admet un polynôme annulateur $Q \in k[X]$ simplement scindé. Alors nécessairement Q divise P donc $P(u) = 0$. □

Exercice 2.25.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

Solution. Le polynôme $X(X^2 + X + 1)$ annule A, et $X \wedge (X^2 + X + 1) = 1$, donc par lemme des noyaux on a $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \ker(A^2 + A + I_n)$. Ainsi, le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(A) = \dim(\ker(A^2 + A + I_n))$. Si $\ker(A^2 + A + I_n)$ est de dimension impaire, alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u induit par A sur ce sous-espace stable est de degré impair, donc admet une racine réelle. Cette racine doit être une racine de tout polynôme annulateur de u, en particulier de $X^2 + X + 1$: absurde. Donc $\mathrm{rg}(A)$ est pair. □

Exercice 2.26.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Solution. Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ annule A. Une étude rapide de ce polynôme (dérivée, tableau de variations) montre qu'il admet une unique racine réelle α et que celle-ci est strictement positive. La décomposition en irréductibles de P est donc $P = (X - \alpha)Q$ avec Q de degré 2 et irréductible, donc de signe constant. Comme $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$, alors $Q > 0$.

Par lemme des noyaux, on a $\mathbb{R}^n = \ker(A - \alpha I_n) \oplus \ker(Q(A))$. La restriction de (l'endomorphisme induit par) A sur $\ker(A - \alpha I_n)$ admet comme polynôme minimal un diviseur de $X - \alpha$, donc son polynôme minimal est $X - \alpha$, et son polynôme caractéristique est de la forme $(X - \alpha)^p$. Idem, la restriction de A sur $\ker(Q(A))$ admet Q comme polynôme minimal (car Q est irréductible), et son polynôme caractéristique est de la forme Q^q. Ainsi, $\chi_A = (X - \alpha)^p Q^q$. Comme Q est de degré 2, alors p a la même parité que n. Le déterminant de A est

$$\det(A) = (-1)^n \chi_A(0) = (-1)^n (-\alpha)^p Q(0)^q = \alpha^p Q(0)^q > 0.$$

□

Exercice 2.27 (Théorème de Cayley-Hamilton).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le but est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

1. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On lui associe $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ sa matrice compagnon. Montrer que P est le polynôme caractéristique de C.
3. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Construire à partir de x une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où C est une matrice compagnon.
4. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Solution. 1. $\chi_u(u) = 0$.

2. On développe tranquillement par rapport à la dernière colonne.
3. Il existe un plus petit $k > 0$ tel que $(x, u(x), ..., u^k(x))$ soit liée. Ainsi, $(x, u(x), ..., u^{k-1}(x))$ est libre et il existe $a_0, ..., a_{k-1}$ tel que $u^k(x) + a_0 x + ... + a_{k-1} u^{k-1}(x) = 0$. On complète alors $(x, u(x), ..., u^{k-1}(x))$ en une base $\mathcal{B}$. Dans cette base, la matrice de u a la forme voulue.
4. On a $\chi_u = \chi_C \chi_A$, donc $\chi_u(u) = \chi_A(u) \circ \chi_C(u)$, puis $\chi_u(u)(x) = \chi_A(u) \circ \chi_C(u)(x)$. Or, d'après 2 et 3 on a $\chi_C(u)(x) = 0$, donc $\chi_u(u)(x) = 0$. Ceci est vrai pour tout $x \neq 0$ (la matrice C dépend de x, mais pour tout $x \neq 0$ il existe une telle matrice C) et est évident si $x = 0$, d'où le résultat.

□

Exercice 2.28 (Matrices circulantes).
Les matrices circulantes sont des polynômes en la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ I_1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de J, puis son polynôme caractéristique. La matrice J est-elle diagonalisable ?
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et $A = P(J)$ une matrice circulante. Justifier que A est diagonalisable, et la diagonaliser.

Solution. 1. On a facilement $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\deg(\pi_J) \geqslant n$ et $X^n - 1$ annule J, d'où $\pi_J = X^n - 1$. Ainsi, π_J est simplement scindé sur $\mathbb{C}$ donc J est diagonalisable. De plus, pour des raisons de degré : $\chi_J = \pi_J$.

2. Soit Q inversible telle que QJQ^{-1} est diagonale. On a alors

$$QAQ^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q J^k Q^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (QJQ^{-1})^k$$

est diagonale comme somme de telles matrices, donc A est diagonalisable.
Il faut maintenant déterminer les valeurs propres de A. Comme $\pi_J = X^n - 1$, le spectre de J est $\mathrm{Sp}(J) = \{\omega^k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$. Donc $QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$,

puis $QAQ^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$.

□

Exercice 2.29.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f admet un polynôme minimal non-nul. Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.

Solution. Notons P le polynôme minimal. Supposons $P = XQ$. Alors $f \circ Q(f) = 0$, et puisque f est inversible on a $Q(f) = 0$, ce qui contredit la minimalité de P. Donc X ne divise pas P, c'est-à-dire P admet un coefficient constant $a_0 \neq 0$. On écrit alors $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La relation $P(f) = 0$ donne $f^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0$ et donc

$$a_0 \mathrm{id} = -f^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k f^k = -f \circ \left(f^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k f^{k-1} \right).$$

Par unicité de l'inverse, on a donc $f^{-1} = \dfrac{-1}{a_0} \left(f^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k f^{k-1} \right)$.

On peut aussi utiliser une relation de Bézout entre P et X, qui sont premiers entre eux : il existe des polynômes U et V tels que $UP + VX = 1$, donc $V(f) \circ f = \mathrm{id}$ donc $f^{-1} = V(f)$.

En dimension finie, on peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ; le coefficient constant de χ_f est non-nul car égal à $\pm \det(f)$. □

2.4 Exponentielles d'endomorphismes

Exercice 2.30.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est l'exponentielle d'une matrice réelle, alors $\det(A) > 0$.
2. Étudier la réciproque, en regardant par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution. 1. On suppose $A = \exp(B)$. En trigonalisant (dans $\mathbb{C}$!) la matrice B, et en notant que déterminant et trace sont invariants par conjugaison et extension de corps, on a $\det(A) = \det(\exp(B)) = \exp(\operatorname{tr}(B)) > 0$.

2. Si $A = \exp(B)$, alors $C = \exp(B/2)$ vérifie $C^2 = A$. En nommant les coefficients de C, la relation $C^2 = A$ donne des équations incompatibles ce qui montre que A n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle. Or $\det(A) = 1 > 0$ donc la réciproque est fausse.

$\square$

Exercice 2.31.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$.

Solution. Supposons $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0$. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k X = \lambda^k X$. On en déduit

$$\exp(tA)X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} X = e^{t\lambda} X.$$

En prenant la limite, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda} X = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda} = 0$ ce qui montre que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Réciproquement, on utilise la décomposition de Dunford $A = D + N$. Comme D et N commutent, on a $\exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN)$. Comme D est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}DP = D'$ où $D' = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Les λ_i sont les valeurs propres de A, car A et D ont le même spectre. Soit $\mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}(\lambda_i)$. Par hypothèse, $\mu < 0$. Avec $\|A\| := \sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|$, on a $\|\exp(tD')\| \leqslant n e^{\mu t}$, d'où on tire

$$\|\exp(tD)\| \leqslant n\|P\|\|P^{-1}\| e^{t\mu}.$$

Comme N est nilpotente, alors

$$\|\exp(tN)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \|N\|^k = f(t),$$

où f est polynomiale en t. En combinant tout, on a

$$\|\exp(tA)\| \leqslant \|\exp(tD)\|\|\exp(tN)\| \leqslant n\|P\|\|P^{-1}\| e^{t\mu} f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

3 Convexité

Exercice 3.1 (Convexité et extrema).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Si f admet un minimum local en a, montrer qu'il s'agit d'un minimum global.
2. Si f admet un maximum local en a, montrer que f est constante sur un intervalle contenant a.
3. Si f admet un maximum global en a, montrer que f est constante.

Solution. 1. Soit $x > a$. Comme a est un minimum local, il existe $a < b < x$ tel que $f(b) > f(a)$. Par croissance des pentes, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant 0$$

donc $f(x) \geqslant f(a)$. On fait pareil si $x < a$. Donc a est un minimum global.

2. Soit $b < a < c$ tel que pour $x \in [b, c]$ on ait $f(x) \leqslant f(a)$. Alors par croissance des pentes, et pour $b < x < a < y < c$ on a

$$0 \leqslant \frac{f(a) - f(x)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leqslant 0$$

donc $f(x) = f(a) = f(y)$.

3. Si le maximum est global, on peut faire tendre b vers $-\infty$ et c vers $\to +\infty$ dans la question précédente.

□

Exercice 3.2.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$(b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Solution. La corde reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est d'équation $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, et est au dessus du graphe de f car f est convexe. Donc $f(t) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$ et on intègre pour trouver l'inégalité de droite.

Comme f est convexe, elle est au dessus de ses tangentes. En particulier, elle est au dessus de sa tangente en $\frac{a + b}{2}$ d'équation $y = f'\left(\frac{a + b}{2}\right)\left(x - \frac{a + b}{2}\right) + f\left(\frac{a + b}{2}\right)$. On intègre et on trouve l'inégalité de gauche. □

Exercice 3.3.
Montrer que pour tout $a, b > 0$, on a $(a+b)\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant a\ln(a) + b\ln(b)$.

Solution. On montre que $f : x \mapsto x\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (en dérivant deux fois), puis on applique l'inégalité $f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$ avec $x = a$, $y = b$ et $t = \dfrac{1}{2}$. □

4 Topologie et espaces vectoriels normés

4.1 Normes et suites dans un EVN

Exercice 4.1.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$ on pose $N(x) = \|f(x)\|$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur E.

Solution. On voit facilement que N est positive et vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Seule la séparation est à obtenir. Si N est une norme, alors $\|f(x)\| = N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc la séparation équivaut à l'injectivité de f. □

Exercice 4.2 (suite du précédent).
Soit $f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour $x \in E$, on considère $\|x\| = \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_k(x)|$. A quelle condition $\|\cdot\|$ est-elle une norme sur E ?

Solution. L'application est positive et vérifie l'inégalité triangulaire. On montre que l'axiome de séparation est équivalent à $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker(f_k) = \{0\}$. □

Exercice 4.3.
Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \ \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}, \ \|P\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

1. Montrer (rapidement) que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Ordonner $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Solution. 1. ...

2. $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$.
3. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Alors $\|P\|_1 = n+1$, $\|P\|_2 = \sqrt{n+1}$ et $\|P\|_\infty = 1$. Donc $\frac{\|P\|_1}{\|P\|_\infty}$ n'est pas borné, donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. Idem avec $\frac{\|P\|_1}{\|P\|_2}$ et $\frac{\|P\|_2}{\|P\|_\infty}$.

□

Exercice 4.4.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et $\|P\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Sont-elles équivalentes ?

Solution. 1. Tout est facile, sauf la séparation de N_2 qui demande un peu de justifications. Si $\|P\|_2 = 0$ alors le polynôme $P - P'$ est nul (infinité de racines). Si P n'est pas constant, alors $\deg(P') < \deg(P)$ donc $\deg(P - P') = \deg(P)$, ce qui est absurde. Donc P est constant, donc $P' = 0$ et on obtient $P = 0$.

2. Elles ne le sont pas. Pour $P_n = X^n$ on a $\|P_n\|_1 = 1$. D'autre part, $P_n - P_n' = X^{n-1}(X-n)$ est négatif (si $n \geqslant 1$) sur $[0,1]$ et décroissante (si $n \geqslant 2$), donc atteint son minimum en $t = 1$, c'est-à-dire $\|P_n\|_2 = n-1$. Donc les normes ne sont pas équivalentes.

□

Exercice 4.5.

1. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application $\|\cdot\| : (x,y) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$.
   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
   (b) Déterminer la boule unité pour cette norme.
2. Soit P un parallélogramme non aplati centré à l'origine. Montrer que P est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. 1. (a) La positivité et l'inégalité triangulaire sont faciles. Si $\|(x,y)\| = 0$ alors $x + ty = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui impose $x = y = 0$, d'où la séparation.

   (b) On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $|x+ty| \leqslant 1$. Un tel couple vérifie $-1 \leqslant x + ty \leqslant 1$ c'est-à-dire $-1 - ty \leqslant x \leqslant 1 - ty$. Pour $t = 0$ on obtient $-1 \leqslant x \leqslant 1$, puis pour $t = 1$ on a $-1 - x \leqslant y \leqslant 1 - x$. La boule unité de cette norme est donc le parallélogramme délimité par ces deux dernières inégalités.

2. Le parallélogramme est défini par des droites $ax + by = 1$, $cx + dy = 1$, et (par symétrie) $ax + by = -1$ et $cx + dy = -1$ (on peut prendre les droites de cette forme car elles ne passent pas par l'origine). Ainsi, les points à l'intérieur du parallélogramme correspondent à $-1 \leqslant ax + by \leqslant 1$ et $-1 \leqslant cx + dy \leqslant 1$, c'est-à-dire à $\|(x,y)\| \leqslant 1$, où on a noté $\|(x,y)\| = \max(|ax+by|, |cx+dy|)$. Il faut montrer que ceci est une norme.

La positivité et l'inégalité triangulaire sont faciles. Si $\|(x,y)\| = 0$ avec $ax+by = cx+dy = 0$. Or ces droites ont des directions différentes, donc ne se coupent qu'en $x = y = 0$. D'où la séparation.

$\square$

Exercice 4.6.

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on considère $\|f\| = |f(0)| + \sup\left\{\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},\ 0 \leqslant x < y \leqslant 1\right\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E. Est-ce que $\|f\| - |f(0)|$ définit une norme sur E ?
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|$.

Solution.

1. Si f est k-lipschitzienne, alors $\sup\{...\} \leqslant k$ donc la quantité considérée est finie. La positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont faciles. Pour la séparation, si $\|f\| = 0$ alors f est constante (regarder le sup) donc nulle (regarder $|f(0)|$). Donc $\|\cdot\|$ est une norme.

   Comme toute fonction constante f vérifie $\|f\| - |f(0)| = 0$, alors cette quantité n'est pas une norme.
2. On a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x|}|x| \leqslant |f(0)| + \dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x|} \leqslant \|f\|$ (par inégalité triangulaire, et $0 \leqslant x \leqslant 1$), d'où le résultat en passant au sup.

$\square$

Exercice 4.7.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $[0,1]$ et $A = \{a_n,\ n \geqslant 1\}$. Soit $E = \mathcal{C}_b([0,1],\mathbb{R})$ (fonctions continues bornées). Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E si et seulement si A est dense dans $[0,1]$.
2. Dans le cas où $\|\cdot\|$ est une norme, est elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Solution.

1. La somme a un sens car f est bornée. Pour montrer que c'est une norme, seule la séparation pose problème.

   Supposons A dense et soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 0$. Alors pour tout n on a $f(a_n) = 0$. Comme A est dense dans $[0,1]$ et que f est continue, on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$. Donc $f = 0$.

   Si A n'est pas dense on peut trouver un intervalle $[x,y] \subset [0,1]$ tel que $A \cap [x,y] = \varnothing$. On prend f une fonction nulle en dehors de $[x,y]$ et positive (non nulle !) sur $[x,y]$. Alors $f \neq 0$ mais $\|f\| = 0$.
2. On a facilement $\|f\| \leqslant \|f\|_\infty$. En revanche, on n'a pas d'inégalité inverse, donc les normes ne sont pas équivalente. Pour le montrer, on construit une suite $(f_n)_n$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$

mais $\|f_n\| \to 0$. Soit f_n une fonction triangle autour de a_n, telle que la base du triangle ne contienne aucun a_k pour $k < n$. En fixant la hauteur du triangle à 1 on a $\|f_n\|_\infty = 1$, mais $\|f_n\| = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$.

□

Exercice 4.8.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est un segment non-vide.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$.

Solution. 1. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence. Par BW on sait que A est non-vide. Si c'est un singleton c'est un segment. Sinon, il possède deux points $a < b$. Soit $a < c < b$ et montrons que $c \in A$. Par l'absurde, on suppose que c n'est pas valeur d'adhérence, donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ ne contient aucun terme de la suite de rang supérieur à un certain n_0. Quitte à réduire ε on peut supposer que $\varepsilon < \frac{c-a}{2}$ et $\varepsilon < \frac{b-c}{2}$. Par hypothèse il existe n_1 tel que $\forall n > n_1,\ |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$, et on peut supposer $n_1 > n_0$. Comme $a \in A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $|a - u_{n_2}| < \varepsilon$. Idem, il existe $n_3 > n_2$ tel que $|b - u_{n_3}| < \varepsilon$. Comme $n_2, n_3 > n_1$ on a $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ pour tout $n_2 \leqslant n < n_3$. Donc il va nécessairement y avoir un n tel que $u_n \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, ce qui est absurde car $n > n_0$ (il faut faire un dessin). Bref, $c \in A$ donc A est un intervalle.

Pour montrer que c'est un segment on montre qu'il est fermé. Soit $(a_n)_n$ une suite de A qui converge vers a. Pour tout n, comme a_n est une valeur d'adhérence il existe $\varphi(n)$ tel que $|a_n - u_{\varphi(n)}| < \frac{1}{n}$. On peut de plus supposer $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ de sorte que φ est une extractrice. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ pour $n > N$. Alors pour $n > N$ on a $|a - u_{\varphi(n)}| \leqslant |a - a_n| + |a_n - u_{\varphi(n)}| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{n}$. En augmentant encore n on obtient $|a - u_{\varphi(n)}| \leqslant 2\varepsilon$ donc ok.

Autre façon : A est borné (facile), soit $\alpha = \inf A$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\alpha < a < \alpha + \varepsilon$, et $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini. Or, $B(\alpha, \varepsilon) \subset B(\alpha, 2\varepsilon)$ donc $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(\alpha, 2\varepsilon)\}$ est infini donc $\alpha \in A$ est une valeur d'adhérence. On procède pareil pour $\sup A$.

2. Formule de trigo : $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Prendre $a = \ln(n+1)$ et $b = \ln(n)$, et on conclut facilement que la suite vérifie l'hypothèse de la question 1. Donc A est un segment, inclus dans $[-1, 1]$.

   Montrons que $A = [-1, 1]$. Prenons $\varphi(n) = \lfloor e^{2n\pi} \rfloor$. Par croissance de ln on a $2n\pi + \ln(1 - e^{-2n\pi}) \leqslant \ln(\varphi(n)) \leqslant 2n\pi$. Si n est assez grand, ces nombres sont dans l'intervalle $[2n\pi - \pi, 2n\pi]$ sur lequel cos croît, donc $\cos(\ln(1 - e^{-2n\pi})) \leqslant \cos(\ln(\varphi(n))) \leqslant 1$, et donc $\cos(\ln(\varphi(n))) \to 1$. Donc $1 \in A$ et on montre pareil que $-1 \in A$. Donc $A = [-1, 1]$.

   En fait, en notant $a = \cos(\alpha)$ et en considérant $\varphi(n) = \lfloor e^{2n\pi+\alpha} \rfloor$, on montre pareil que $\cos(\varphi(n)) \to \cos(\alpha) = a$ et donc on a directement $A = [-1, 1]$ sans utiliser la question 1.

   Autre façon pour la 2 : Rouvière exercice 35 page 110 (utilise l'inégalité des accroissements finis).

□

Exercice 4.9.

1. Soit $(q_n)_n$ une suite d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$ Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite constante.
2. Soit $(r_n)_n$ une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel x. Notons $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(q_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Solution. 1. Il suffit de montrer qu'on peut extraire une sous-suite bornée. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que pout tout n, il existe $m > n$ tel que $q_m < A$. Construisons une sous-suite bornée par récurrence.
Pour $n = 0$ on prend $\varphi(0) = m$ donné par ce qui précède. Si $\varphi(0), ..., \varphi(n)$ sont construits, alors par hypothèse il existe $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $q_{\varphi(n+1)} < A$. Ainsi construite, $(q_{\varphi(n)})_n$ est bornée, et ok.

2. Par l'absurde, on pourrait sinon extraire une sous-suite constante $(q_{\varphi(n)})_n$ égal à un entier q. Mézalor, $p_n \to qx$. Or $p_n \in \mathbb{Z}$ et $qx \notin \mathbb{Z}$ car x irrationnel : absurde.

□

Exercice 4.10 (Suites de Cauchy).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Une suite $(u_n)_n$ de E est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall p, q > N,\ \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. On veut montrer la réciproque. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.
   (a) Si $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, montrer que $(u_n)_n$ converge.
   (b) Montrer que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, et conclure.

Solution. 1. Soit ℓ la limite de $(u_n)_n$ et $\varepsilon > 0$. Soit N tel que pour $p > N$ on ait $\|u_p - \ell\| \leqslant \varepsilon$. Pour $p, q > N$ on a $\|u_p - u_q\| \leqslant \|u_p - \ell\| + \|\ell - u_q\| \leqslant 2\varepsilon$ donc ok.

2. (a) Soit ℓ une valeur d'adhérence, associée à une extractrice $\varphi(n)$. Soit $\varepsilon > 0$ et N_1 donné par la propriété de Cauchy. Soit N_2 tel que pour $n > N_2$ on ait $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $p > N$ on a $\|u_p - \ell\| \leqslant \|u_p - u_{\varphi(p)}\| + \|u_{\varphi(p)} - \ell\| \leqslant 2\varepsilon$.
   (b) Par BW (en dimension finie), il suffit de montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. Soit N donné par la propriété de Cauchy avec $\varepsilon = 1$ (on peut prendre n'importe quoi). Alors pour $p > N$ fixé et $q > N$ on a $\|u_q\| \leqslant 1 + \|u_p\|$ donc la suite est bornée.

□

Exercice 4.11.

Pour $n \geqslant 1$ entier et p un nombre premier, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n (l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n). On définit la suite

$$x_n = (-1)^{v_5(n)} \frac{v_2(n)}{1 + v_3(n)}.$$

Montrer que tout nombre réel est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Solution. Soit $r = \frac{p}{q} > 0$ un rationnel avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Notons $\varphi(n) = 2^p \times 3^{q-1} \times 7^n$, avec φ est une extractrice et $x_{\varphi(n)} = \frac{p}{q} = r$, donc r est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.

Si $r = \frac{-p}{q} < 0$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, on prend $\varphi(n) = 2^p \times 3^{q-1} \times 5 \times 7^n$ et on arrive à la même conclusion.

Donc $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ est contenu dans l'ensemble A est valeurs d'adhérence. Or, A est fermé (cf. correction de l'exercice 6), donc on montre facilement que $\mathbb{R} \subset A$, càd $A = \mathbb{R}$. □

4.2 Topologie (dans un espace métrique)

Exercice 4.12.
Soit (E, d) un espace métrique, et A, B deux fermés disjoints de E.

1. Déterminer une fonction continue $f : E \to [0, 1]$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
2. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Solution.

1. On prend $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Comme $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$ (car A est fermé ; et idem pour B), alors f est bien définie car A et B sont disjoints. La fonction $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne donc continue (idem pour B ; voir preuve ci-dessous), donc f est continue. On a immédiatement $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
   Pour montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, on observe que pour tout $x, y \in E$ et $a \in A$ on a $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$. En prenant l'inf à droite, on obtient $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. On montre de même que $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$ donc $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$.
2. Prendre $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ et $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$.

□

Exercice 4.13.
Soit E, F des espaces métriques, $A \subset E$ et $f : A \to F$.

1. Soit $X \subset A$. On suppose que f est continue. Montrer que $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. Donner un exemple pour lequel l'inclusion est stricte.
2. On suppose que pour tout $X \subset A$, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. Montrer que f est continue sur A.

Solution.

1. Soit $y \in f(\overline{X})$. Il existe $x \in \overline{X}$ tel que $y = f(x)$, et il existe $(x_n)_n$ une suite dans X qui tend vers x. Par continuité de f, on a $f(x_n) \to f(x) = y$, donc $y \in \overline{f(X)}$.
   Prenons $E = A = X = \mathbb{R}$ et $f = \exp$. Alors $f(\overline{X}) = f(\mathbb{R}) = R_+^*$, mais $\overline{f(X)} = \overline{R_+^*} = \mathbb{R}_+$.

2. Soit Y un fermé de F et $X = f^{-1}(Y)$. Montrons que X est fermé. On a clairement $f(X) \subset Y$, donc $\overline{f(X)} \subset Y$ car Y est fermé. L'hypothèse donne alors $f(\overline{X}) \subset Y$, donc $\overline{X} \subset f^{-1}(Y) = X$. Donc $X = \overline{X}$ est fermé, donc f est continue.

$\square$

Exercice 4.14.

Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est dite localement fermée si pour tout $x \in A$, il existe V un voisinage de x dans E tel que $A \cap V$ soit un fermé de V.

1. Soit U un ouvert de E et F un fermé de E. Montrer que $U \cap F$ est localement fermé.
2. (a) Soit U un ouvert de E et A une partie de E. Montrer que $U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A}$.
   (b) Montrer que dans la définition de "localement fermé", on peut supposer que V est un voisinage ouvert.
   (c) Soit A localement fermée. Montrer qu'il existe U ouvert de E et F fermé de E tels que $A = U \cap F$.

Solution. 1. Soit $x \in A = U \cap F$. Alors U est un voisinage de x dans E (car $x \in U$ et U est ouvert) tel que $A \cap U = U \cap F$. Comme F est fermé dans E, alors $U \cap F$ est fermé dans U, donc ok.

2. (a) Soit $x \in U \cap \overline{A}$. Tout voisinage V de x vérifie $V \cap (U \cap A) = (U \cap V) \cap A \neq \varnothing$, car $U \cap V$ est un voisinage de x et car $x \in \overline{A}$. Donc $x \in \overline{U \cap A}$.
   (b) Soit $x \in A$ et V un voisinage de x dans E tel que $A \cap V$ soit fermé dans V. Il existe F un fermé de E tel que $A \cap V = F \cap V$. Notons $U = \overset{\circ}{V}$, c'est un voisinage ouvert de x dans E, et $A \cap U = A \cap V \cap U = F \cap V \cap U = F \cap U$ est un fermé de U.
   (c) Pour tout $x \in A$, il existe U_x un voisinage ouvert de x tel que $A \cap U_x$ soit fermé dans U_x. Soit $U = \bigcup_{x \in A} U_x$, c'est un ouvert de E. Soit $F = \overline{A}$, c'est un fermé de E. Montrons que $A = U \cap F$. Soit $x \in U \cap F$. Il existe $a \in A$ tel que $x \in U_a$. On a donc $x \in U_a \cap \overline{A} \subset \overline{U_a \cap A}$. Si $x \notin A$, alors $x \in V = U_a \setminus (U_a \cap A)$. Ce dernier ensemble V est ouvert dans U_a car $U_a \cap A$ est fermé dans U_a. Comme U_a est ouvert dans E, alors V est même ouvert dans E. Donc $E \setminus V$ est fermé, et puisque $U_a \cap A \subset E \setminus V$, alors $\overline{U_a \cap A} \subset E \setminus V$. Comme $x \in \overline{U_a \cap A}$, on a $x \notin V$, ce qui est absurde. Donc $x \in A$. D'où le résultat, l'autre inclusion étant évidente.

$\square$

Exercice 4.15.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Soit B_1 et B_2 les boules unités ouvertes pour ces normes. Montrer que si $B_1 = B_2$, alors $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.

Solution. Supposons qu'il existe x tel que $\|x\|_1 < \|x\|_2$. Alors $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 < 1$ donc $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_1 = B_2$ donc $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 < 1$, ce qui est absurde. De même, $\|x\|_2 < \|x\|_1$ conduit à une absurdité, donc $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. $\square$

Exercice 4.16.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer que si deux boules fermées $B = \overline{B(a,r)}$ et $B' = \overline{B(a',r')}$ sont égales, alors $a = a'$ et $r = r'$.

Solution. On raisonne par contraposée : si $(a,r) \neq (a',r')$ alors les boules sont différentes.

Supposons d'abord que $a = a'$ et que (par exemple) $r' > r$. Considérons u un vecteur unitaire de E et $x = a + r'u$. Alors $x \in B'$ mais $x \notin B$. Donc $B \neq B'$.

Supposons maintenant que a$a \neq a'$ et que (par exemple) $r' > r$. Considérons $u = \frac{a'-a}{\|a'-a\|}$ puis $x = a' + r'u$. Alors $x \in B'$. Or, on a $x - a = (a'-a)\left(1 + \frac{r'}{\|a'-a\|}\right)$ et donc en prenant la norme $\|x-a\| = \|a'-a\|\left(1 + \frac{r'}{\|a'-a\|}\right) = \|a'-a\| + r' > r$ c'est-à-dire $x \notin B$. Donc $B \neq B'$. □

Exercice 4.17.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Solution. Si A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables. Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Si A n'est pas inversible, par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe $(A_n)_n$ une suite de matrices inversibles qui tend vers A. On a $\chi_{A_nB} = \chi_{BA_n}$. Comme l'application déterminant est continue (c'est polynomial), alors en faisant $n \to +\infty$ on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. □

4.3 Applications linéaires continues dans les EVN

Exercice 4.18.
Soit E un espace vectoriel normé, et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que f est continue si et seulement si $\ker(f)$ est fermé.

Solution. Le sens direct est une propriété du cours. Réciproquement, supposons que f n'est pas continue. Il existe alors des vecteurs $(x_n)_n$ unitaires tels que $|f(x_n)| \to +\infty$ (négation du fait que f soit bornée sur la sphère unité). Soit $x \in \ker(f)$ (possible si on suppose que $f \neq 0$, ce qui est le cas sinon f est continue). On considère $u_n = x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n$ (bien défini si n est assez grand, car $|f(x_n)| \to +\infty$). Alors $u_n \in \ker(f)$, mais la suite $(u_n)_n$ tend vers x qui n'est pas dans $\ker(f)$. Donc $\ker(f)$ n'est pas fermé. □

Exercice 4.19.
Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est continue si et seulement si $A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Solution. Supposons u continue. Comme la norme est aussi continue, alors $x \mapsto \|u(x)\|$ est continue, donc A est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Réciproquement, supposons que u n'est pas continue. Alors il existe $(x_n)_n$ telle que $\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \to +\infty$. Soit $y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$. Alors $\|y_n\| \to 0$, et $\|u(y_n)\| = 1$. Donc $(y_n)_n$ est une suite de A qui tend vers 0. Comme $0 \notin A$, ceci montre que A n'est pas fermé. $\square$

Exercice 4.20.
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est séquentiellement continue si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E, la suite $(f(x_n))_n$ est bornée dans F.

Solution. Supposons d'abord f séquentiellement continue. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(x_n)_n$ bornée telle que $(f(x_n))_n$ ne soit pas bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi(n)$ tel $\left\|f(x_{\varphi(n)})\right\|_F > n$. Posons $y_n = \dfrac{x_{\varphi(n)}}{n}$. Alors $y_n \to 0$ donc par continuité séquentielle on a $f(y_n) \to f(0) = 0$. Or, $\|f(y_n)\| = \dfrac{1}{n}\left\|f(x_{\varphi(n)})\right\|_F > 1$, ce qui est absurde.

Réciproquement, montrons que f est lipschitzienne, ce qui impliquera qu'elle est séquentiellement continue. Montrons d'abord qu'elle est bornée sur la boule unité. Par l'absurde, si elle ne l'est pas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose d'un x_n tel que $\|x_n\|_E \leqslant 1$ et $\|f(x_n)\|_F \geqslant n$. Alors la suite $(x_n)_n$ est bornée mais $(f(x_n))_n$ ne l'est pas, ce qui est absurde. Il existe donc $A > 0$ tel que si $\|x\|_E \leqslant 1$ alors $\|f(x)\|_F \leqslant A$. Soit $x \in E$ et $u = \dfrac{x}{\|x\|_E}$. Alors $\|f(u)\|_F \leqslant A$ donc $\|f(x)\|_F \leqslant A\|x\|_E$. En en déduit par linéarité de f que pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant A\|x - y\|_E$, donc f est lipschitzienne donc séquentiellement continue. $\square$

Exercice 4.21.
Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ donnée par $D(f) = f'$. Soit $\|\cdot\|$ une norme (quelconque !) sur E. Montrer que D n'est pas continue pour $\|\cdot\|$.

Solution. Si D est continue, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\|D(f)\| \leqslant \lambda\|f\|$ (car D est linéaire). Soit $f : x \mapsto e^{ax}$, avec $a > \lambda > 0$. Alors $D(f) = af$, donc $\|D(f)\| = a\|f\| > \lambda\|f\|$, ce qui contredit la continuité de D. $\square$

Exercice 4.22.
On considère E l'ensemble des suites réelles (ou complexes) qui convergent. Pour $u \in E$ on note $\|u\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme.
2. Justifier rapidement que l'application L donnée par $L(u) = \lim_n u_n$ est linéaire. Montrer que L est séquentiellement continue, et trouver la meilleure constante de continuité possible.

Solution. La première question et le début de la deuxième sont simplement la vérification des définitions. On a facilement $|L(u)| \leqslant \|u\|$ donc L est 1-lipschitzienne donc séquentiellement continue. La constante 1 est optimale, car elle est atteinte par toute suite constante. $\square$

4.4 Compacité, connexité

Exercice 4.23.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer que f est uniformément continue.

Solution. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$ (avec $x, y \in [-T, 2T]$), alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. De plus, on peut supposer $\delta < T$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + kT \in [0, T]$. Alors $y' = y + kT \in [-T, 2T]$. Si $|x - y| < \delta$, alors $|x' - y'| < \delta$ et donc $|f(x') - f(y')| < \varepsilon$ car $x', y' \in [-T, 2T]$. Par T-périodicité, on obtient $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. $\square$

Exercice 4.24 (Théorème de point fixe dans un compact).
Soit (E, d) un espace métrique compact, et $f : E \to E$ une application telle que pour tout $(x, y) \in E^2$ tels que $x \neq y$, alors $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe a.
2. Soit $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers a.

Solution.

1. L'application $g : x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur E car composée de telles applications. Comme E est compact, g atteint son minimum en un point $a \in E$. Montrons que $g(a) = 0$. Par l'absurde, on suppose $g(a) > 0$, c'est-à-dire $f(a) \neq a$. On a par hypothèse $g(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = g(a)$, ce qui contredit le choix de a ! Donc $g(a) = 0$ et $f(a) = a$.

   Si a et b sont deux points fixes distincts, alors : $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b)$, ce qui est absurde. Donc le point fixe est unique.

2. S'il existe n tel que $x_n = a$, alors la suite est stationnaire à a donc converge vers a.

   Sinon, comme $f(a) = a$ on a $d(x_{n+1}, a) < d(x_n, a)$, donc $(d(x_n, a))_n$ est une suite strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ. Supposons $\ell > 0$. Comme $(x_n)_n$ est une suite du compact E, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite $b \in E$. On a alors $d(x_{\varphi(n)}, a) \to d(a, b) = \ell$, et par continuité de f on a aussi $d(f(x_{\varphi(n)}), a) \to d(f(b), a) = \ell$. Mézalor, on aurait $\ell = d(a, f(b)) = d(f(a), f(b)) < d(a, b) = \ell$, ce qui est absurde. Donc $\ell = 0$, et $b = a$.

$\square$

Exercice 4.25.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact de E. Soit $f : K \to K$ une application continue telle que pour tout $(x,y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$.

1. Soit $x \in K$, montrer que $f(K)$ est dense dans K.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
3. Montrer que f est bijective.

Solution. 1. Posons $x_n = f^n(x)$. C'est une suite à valeurs dans le compact $f(K)$, donc on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$. Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que $\psi : n \mapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est croissante, et considérer la suite extraite $(x_{\psi(n)})_n$. Notons que $f^{\varphi(n)}(x_{\psi(n)}) = x_{\varphi(n+1)}$. Par hypothèse, on a alors $\|x - x_{\psi(n)}\| \leqslant \|f^{\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n)}(x_{\psi(n)})\| = \|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n+1)}\|$, et ceci tend vers 0 car $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. Donc $(x_{\psi(n)})_n = (f^{\psi(n)}(x))_n$ est une suite de $f(K)$ qui tend vers x.

2. Pour x, y dans K, on dispose donc de suites $(x_{\psi(n)})_n$ et $(y_{\psi(n)})_n$ de $f(K)$ qui tendent vers x et y (pour voir qu'on peut prendre le même ψ, il faut reprendre l'argument de la question 1 avec la suite $(x_n, y_n)_n$ à valeurs dans le compact K^2). On peut alors écrire $\|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f^{\psi(n)}(x) - f^{\psi(n)}(y)\| = \|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}\|$. On trouve le résultat en prenant la limite $n \to +\infty$.

3. L'injectivité est claire par hypothèse. Pour la surjectivité, on utilise la question 1. Soit $x \in K$, alors il existe une suite de $f(K)$ qui tend vers x. Comme K est compact et f continue, alors $f(K)$ est compacte donc fermée ; et la limite de cette suite est donc dans $f(K)$. Donc $x \in f(K)$ donc f est surjective.

□

Exercice 4.26.

Soit K un compact, E un espace vectoriel normé et $f : K \to E$ une fonction. On considère $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in K\}$ le graphe de f. Montrer que f est continue si et seulement si son graphe est compact.

Solution. Supposons f continue. Alors $g : x \mapsto (x, f(x))$ est continue sur le compact K, donc son image Γ est compacte.

Réciproquement, supposons Γ compact. Soit F un fermé de E, montrons que $f^{-1}(F)$ est fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite dans $f^{-1}(F)$ qui converge vers $x \in K$, montrons que $x \in f^{-1}(F)$. Comme $(x_n, f(x_n))_n$ est dans Γ, on peut supposer qu'elle converge (quitte à la remplacer par une suite extraite). Sa limite est nécessairement $(x, f(x))$ car la première coordonnée converge vers x. Donc $f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Comme F est fermé et que $f(x_n) \in F$ par hypothèse, alors $f(x) \in F$, donc $x \in f^{-1}(F)$. Donc $f^{-1}(F)$ est fermé, et f est continue. □

Exercice 4.27 (Application propre).

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite propre si l'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}^m$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

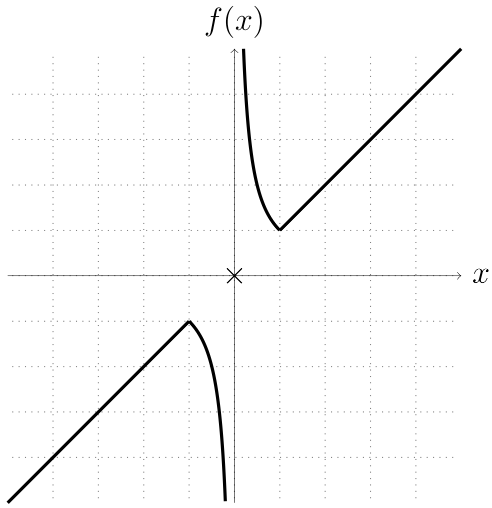
1. Une application bornée est-elle propre ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Montrer que f est propre si et seulement si $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
3. Une application propre est-elle forcément continue ?

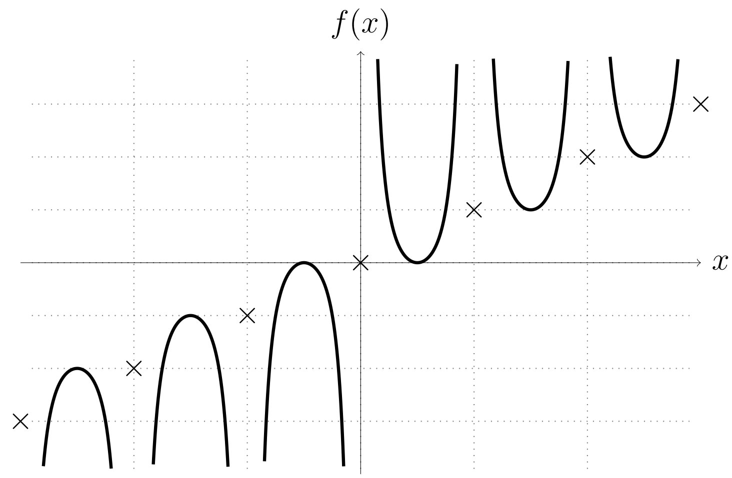
Solution. 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bornée. Il existe un rayon $R > 0$ telle que $f(\mathbb{R}^n) \subset B_m(0, R)$. Soit $K = \overline{B_m(0, R)}$ la boule fermé de rayon R. Elle est fermée et bornée donc compacte car $\mathbb{R}^m$ est de dimension finie. Le choix de R est tel que l'image réciproque $f^{-1}(K) = \mathbb{R}^n$ n'est pas compacte. Donc une application bornée n'est pas propre.

2.
   - $\triangleright$ Supposons f propre. Soit $A > 0$, la boule fermée $K = \overline{B_m(0, A)}$ est compacte, donc $f^{-1}(K)$ est compacte donc bornée. Il existe $M > 0$ tel que $f^{-1}(K) \subset B_n(0, M)$. Alors si $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|x\| > M$, on a $\|f(x)\| > A$. On a donc montré
   $$\forall A > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| > M \Rightarrow \|f(x)\| > A$$
   c'est-à-dire $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
   - $\triangleright$ Réciproquement, supposons $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. En particulier, K est fermé. Comme f est continue, alors $f^{-1}(K)$ est fermé. Si $f^{-1}(K)$ n'est pas compact, c'est qu'il n'est pas borné (car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie). Dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_n$ dans $f^{-1}(K)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n)\|$ par hypothèse. Or, la suite $(f(x_n))_n$ est à valeurs dans le compact K donc elle est bornée, ce qui est absurde. Ceci montre que $f^{-1}(K)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, donc compact. Ainsi, f est propre.

3. La réponse est non. Donnons un contre-exemple, avec $n = m = 1$. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ représentée ci-dessous (à gauche) et donnée par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ x & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}.$$
La fonction f n'est pas continue, mais elle est propre. Montrons-le. L'image de f est $f(\mathbb{R}) =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$. Ainsi, si $K \subset \mathbb{R}$ est compact, alors
$$f^{-1}(K) = f^{-1}(K \cap]-\infty, -1]) \cup f^{-1}(K \cap \{0\}) \cup f^{-1}(K \cap [1, +\infty[).$$
   - $\triangleright$ Puisque $K \cap \{0\} = \varnothing$ ou $\{0\}$, alors $f^{-1}(K \cap \{0\}) = \varnothing$ ou $\{0\}$, donc est compact.
   - $\triangleright$ Si $K \cap [1, +\infty[= \varnothing$, alors son image réciproque est vide donc compact.
   Sinon, l'ensemble $K' = K \cap [1, +\infty[$ est un compact de $[1, +\infty[$, dont l'image réciproque est incluse dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $f^{-1}(K')$ est fermé comme image réciproque d'un fermé. De plus, comme K' est borné il existe $a > 1$ tel que $K' \subset [1, a]$. Alors $f^{-1}(K') \subset [\frac{1}{a}, a]$ donc est borné. Donc $f^{-1}(K')$ est compact.
   - $\triangleright$ On montre de la même façon que $f^{-1}(K \cap]-\infty, -1])$ est compact.

Ainsi, $f^{-1}(K)$ est l'union de trois compacts, donc est compact. Donc f est propre.





Plus généralement, une fonction qui tend vers $\pm\infty$ en ses points de discontinuité, et aussi en $\pm\infty$, convient. Par exemple, la fonction ci-dessus à droite (construite à base de $\pm(n+\tan^2)$ pour $n \in \mathbb{N}$) est propre mais a une infinité dénombrable de points de discontinuité. $\square$

Exercice 4.28 (Théorème de Riesz).
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit B la boule unité fermée de E, c'est-à-dire $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

1. Justifier que si E est de dimension finie, alors B est compacte.
2. (a) Supposons qu'il existe $x_1, ..., x_n \in E$ tel que $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \frac{1}{2})$. Montrer que E est de dimension finie.

   (b) En déduire que si E est de dimension infinie, alors B n'est pas compacte.

Solution. 1. (...)

2. (a) Notons $F = \mathrm{vect}(x_1, ..., x_n)$ et montrons que $F = E$. Par l'absurde, soit $x \in E \setminus F$. Alors $d = d(x, F) > 0$ car F est fermé (sous-espace de dimension finie). Soit $y \in F$ tel que $d \leqslant \|x - y\| < 2d$. Soit $u = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in B$, par hypothèse, il existe k tel que $u \in B(x_k, \frac{1}{2})$, càd $\|u - x_k\| < \frac{1}{2}$. Or, pour tout $z \in F$,

$$\|u - z\| = \frac{1}{\|x - y\|}\|x - (y + \|x - y\|z)\| \geqslant \frac{d}{\|x - y\|} > \frac{1}{2}$$

   d'où l'absurdité. Donc $E = F$ est de dimension finie.

   (b) Soit $x_1 \in B$. Comme $B \neq B(x_1, \frac{1}{2})$, il existe $x_2 \in B \setminus B(x_1, \frac{1}{2})$. Supposons ainsi construits $x_1, ..., x_n$. Comme $B \not\subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \frac{1}{2})$, il existe $x_{n+1} \in B \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \frac{1}{2}))$. On construit ainsi une suite $(x_n)_n$ dans B tel que pour tout $n \neq m$ on a $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$. Cette suite ne peut pas admettre de valeur d'adhérence. Donc B n'est pas compacte.

$\square$

Exercice 4.29 (Théorème de Darboux).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$, et soit I un intervalle ouvert non-vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On pourra considérer $B = \left\{\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y},\ (x,y) \in I \text{ et } x < y\right\}$.

Solution. L'ensemble $A = \{(x,y) \in I \mid x < y\}$ est connexe par arc. L'application $g : (x,y) \mapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est continue sur A, et $B = g(A)$. Donc B est connexe par arcs.
Comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, par théorème des accroissements finis il existe $z \in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z)$, donc $B \subset f'(I)$. Si $x \in I$ et si $(x_n)_n$ est une suite de I qui tend vers x et telle que $x < x_n$, alors $f'(x) = \lim_n g(x, x_n)$ donc $f'(I) \subset \overline{B}$. Ainsi, $B \subset f'(I) \subset \overline{B}$. Comme B est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, c'est un intervalle (fermé, ouvert, semi-ouvert, peu importe). Alors $\overline{B}$ est le même intervalle avec les bornes fermées, donc $f'(I)$ est aussi un intervalle, avec les mêmes bornes. □

5 Espaces préhilbertiens réels

5.1 Généralités

Exercice 5.1.
Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et F un sous espace de E. Montrer que $\displaystyle\sum_{b\in\mathcal{B}} d(b,F)^2$ est indépendant du choix de $\mathcal{B}$.

Solution. Soit $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une BON de F. Pour $b \in \mathcal{B}$, on a $d(b,F)^2 = \|b\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle b, f_i\rangle^2$ car $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une BON. Donc :

$$\sum_{b\in\mathcal{B}} d(b,F)^2 = \sum_{b\in\mathcal{B}} \left(\|b\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle b, f_i\rangle^2\right) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \|b\|^2 - \sum_{b\in\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{p} \langle b, f_i\rangle^2.$$

Or, puisque $\mathcal{B}$ est une BON, $\|b\|^2 = 1$. De plus, les deux sommes peuvent être permutées. Donc :

$$\sum_{b\in\mathcal{B}} d(b,F)^2 = \sum_{b\in\mathcal{B}} 1 - \sum_{i=1}^{p} \sum_{b\in\mathcal{B}} \langle b \mid f_i\rangle^2 = n - \sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2 = n - \sum_{i=1}^{p} 1 = n - p$$

en utilisant successivement que $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ puis $\mathcal{B}$ sont des BON. Ceci est bien indépendant de la BON choisie pour E. □

Exercice 5.2 (Convergence faible).
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit qu'elle converge faiblement dans E s'il existe $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $\langle u_n, v\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, v\rangle$. On note dans ce cas $u_n \rightharpoonup u$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, montrer l'unicité de sa limite faible.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement (c'est-à-dire pour la norme issue du produit scalaire), montrer qu'elle converge faiblement vers la même limite.
3. Si E est de dimension finie, montrer que la réciproque est vraie.
4. (a) Supposons E de dimension infinie et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Montrer que $e_n \rightharpoonup 0$, et en déduire que la réciproque à la question 2 est fausse en dimension infinie.
   (b) Exemple : dans $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, montrer que la famille $(f_n)_{n\geqslant 1}$, avec $f_n(t) = \sin(nt)$, converge faiblement mais pas fortement.
   (c) Supposons E de dimension infinie et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle converge fortement.

Solution. 1. Soit u et u' deux limites faibles. Par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$, on a $\langle u-u', v\rangle = 0$ pour tout $v \in E$, ce qui montre que $u = u'$.

2. Soit u la limite forte. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \leqslant \|u_n - u\|\|v\|$ pour tout $v \in E$. Donc $u_n \rightharpoonup u$.
3. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une BON de E. On suppose $u_n \rightharpoonup u$. En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on obtient $\langle u_n, e_i\rangle \to \langle u, e_i\rangle$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend coordonnée par coordonnée vers u. Munissons E de la norme $\|\cdot\|' : x \mapsto \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle x, e_i\rangle|$. Alors $\|u_n - u\|' \to 0$. Par équivalence des normes en dimension finie, on obtient $\|u_n - u\| \to 0$, d'où le résultat.
4. (a) Soit $x \in E$. L'inégalité de Bessel s'écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$. En particulier, la série à termes positifs $\sum \langle x, e_n\rangle^2$ converge, donc son terme général tend vers 0. Comme $0 = \langle x, 0\rangle$, et puisque ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit $e_n \rightharpoonup 0$. Or, $\|e_n\| = 1$ pour tout n, donc $\|e_n - 0\|$ ne peut pas tendre vers 0. La réciproque est donc fausse.
   (b) Avec $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$, on calcule $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ si $n \neq m$ et 1 si $n = m$. Donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille orthonormale, et on applique ce qui précède. (Remarque : la convergence faible $f_n \rightharpoonup 0$ est l'énoncé du lemme de Riemann-Lebesgue.)
   (c) Soit u la limite faible. La condition est $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|u\|$. En effet, en écrivant $\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle$ on voit que la condition est suffisante. Réciproquement, si $\|u_n - u\| \to 0$, alors $|\|u_n\|^2 - \|u\|^2| = |\langle u_n - u, u_n\rangle + \langle u, u_n - u\rangle| \leqslant \|u_n - u\|\,(\|u_n\| + \|u\|) \to 0$, donc la condition est nécessaire.

□

Exercice 5.3 (Un contre-exemple en dimension infinie).
Soit E l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire donné par $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$.
Soit F le sous-espace des fonctions polynomiales. Montrer que $F \neq (F^\perp)^\perp$ et que $E \neq F \oplus F^\perp$.

Solution. Soit $f \in F^\perp$. Par théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Par hypothèse, pour tout n on a $\langle f, P_n\rangle = 0$, donc en passant à la limite on obtient $\|f\|^2 = 0$, donc $f = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$, $F \neq (F^\perp)^\perp = E$ et $E \neq F \oplus F^\perp = F$. □

Exercice 5.4.
Soit E un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$ on ait $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que $\ker(u)$ et $\operatorname{im}(u)$ sont orthogonaux.

Solution. Soit $x \in \ker(u)$ et $y = u(z) \in \operatorname{im}(u)$. Alors

$$\langle x,y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = \langle x+z, u(z)\rangle = \langle x+z, u(x+z)\rangle = 0$$

d'où le résultat. □

Exercice 5.5.
Soit E l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $f \in E$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)^n dt$. Montrer que $I_n^2 \leqslant I_{n-1}I_{n+1}$.
2. Quelle est la valeur minimale possible de $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt$, pour $f \in E$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$?

Solution. On munit E du produit scalaire donné par $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$.

1. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en écrivant $n = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n+1}{2}$.
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left|\displaystyle\int_0^1 f\right| \leqslant 1 \times \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2}$. Donc la valeur minimale cherchée est au moins 1, et comme la fonction $x \mapsto 1$ réalise cette valeur, alors le minimum cherché est 1.

□

Exercice 5.6 (Famille obtusangle).

Soit E un espace euclidien de dimension n. Le but est de déterminer l'entier p maximal tel qu'il existe une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ vérifiant la propriété (P) : $\langle x_i, x_j\rangle < 0$ dès que $i \neq j$.

1. Déterminer p pour $n = 1$ puis $n = 2$. Conjecturer la valeur de p pour n en général.

Nous allons montrer par récurrence sur n que la valeur de p est celle conjecturée. On suppose donc le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $n-1$, et on suppose $\dim(E) = n$.

2. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de vecteurs vérifiant (P). Soit y_i le projeté orthogonal de x_i sur $\mathrm{vect}(x_p)^\perp$. Montrer que $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ vérifie (P). En déduire que $p \leqslant n + 1$.
3. Soit $x_p \in E\setminus\{0\}$. Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ des vecteurs de $\mathrm{vect}(x_p)^\perp$ vérifiant (P). Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ donnée par $x_i = u_i - \lambda x_p$ (pour $1 \leqslant i \leqslant p - 1$) vérifie (P). En déduire que $p \geqslant n + 1$, et conclure.

Solution. 1. Pour $n = 1$, la famille $(1, -1)$ réalise la propriété, donc $p \geqslant 2$. Comme on ne peut pas avoir 3 réels de signes tous différents, alors $p \leqslant 2$ donc $p = 2$.

Pour $n = 2$, la famille $(1, j, j^2)$ réalise la propriété, donc $p \geqslant 3$. Si $(x_1, ..., x_4)$ réalise la propriété, alors l'angle entre x_i et x_{i+1} (avec $x_5 = x_1$) est strictement plus grand que $\frac{\pi}{2}$ (faire un dessin !). Or, la somme de ces 4 angles est 2π, c'est donc absurde. Donc $p \leqslant 3$ donc $p = 3$.

On conjecture donc $p = n + 1$

2. Notons $F = \mathrm{vect}(x_p)^\perp$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p - 1$, il existe λ_i tel que $x_i = y_i + \lambda_i x_p$. On calcule

$$0 > \langle x_i, x_p\rangle = \langle y_i + \lambda_i x_p, x_p\rangle = 0 + \lambda_i \|x_p\|^2$$

donc $\lambda_i < 0$. De plus :

$$0 > \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i + \lambda_i x_p, y_j + \lambda_j x_p\rangle = \langle y_i, y_j\rangle + \lambda_i\lambda_j \|x_p\|^2$$

d'où on déduit $\langle y_i, y_j\rangle < 0$ (car $\lambda_i\lambda_j > 0$). Donc $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ vérifie (P). Si $p \geqslant n + 2$, alors on a une famille avec $\geqslant n + 1$ vecteurs de F qui vérifie (P), alors que $\dim(F) = n$. C'est absurde, donc $p \leqslant n + 1$.

3. Cherchons λ par analyse-synthèse. Si λ existe, alors la condition (P) donne $\langle x_i, x_j\rangle < 0$, c'est-à-dire pour $i, j \neq p$ et $i \neq j$: $\langle u_i, u_j\rangle + 0 + 0 + \lambda^2\|x_p\|^2 < 0$ (on a utilisé $u_i \in F = \mathrm{vect}(x_p)^\perp$), donc $\lambda^2 < -\frac{\langle u_i, u_j\rangle}{\|x_p\|^2}$. Comme on cherche $\lambda > 0$, on a donc $\lambda < \sqrt{-\frac{\langle u_i, u_j\rangle}{\|x_p\|^2}}$.

Passons à la synthèse. Soit $0 < \lambda < \min\limits_{i,j\neq p, i\neq j} \sqrt{-\frac{\langle u_i, u_j\rangle}{\|x_p\|^2}}$, et $x_i = u_i - \lambda x_p$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Par construction, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ vérifie (P), au moins pour $i, j \neq p$. Si $j = p$ et $i \neq p$, on a $\langle x_i, x_p\rangle = 0 - \lambda\|x_p\|^2 < 0$ (en utilisant $\langle u_i, x_p\rangle = 0$). Ainsi, en partant d'une famille de $\mathrm{vect}(x_p)^\perp$ à n éléments vérifiant (P), on construit une famille de E à $n + 1$ éléments vérifiant (P). Donc $p \geqslant n + 1$, et on conclut $p = n + 1$.

□

5.2 Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 5.7.
Soit E un espace préhilbertien réel et $u : E \to E$ une application préservant le produit scalaire. Montrer que u est un automorphisme orthogonal.

Solution. On calcule astucieusement :

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda x\|^2 &= \|\lambda x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda\langle \lambda x, x\rangle \\ &= \|u(\lambda x)\|^2 + \lambda^2 \|u(\lambda x)\|^2 - 2\lambda\langle u(\lambda x), u(x)\rangle \\ &= \|u(\lambda x) - \lambda u(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x+y-x-y\|^2 &= \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x+y, x\rangle - 2\langle x+y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \\ &= \|u(x+y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2\langle u(x+y), u(x)\rangle - 2\langle u(x+y), u(y)\rangle + 2\langle u(x), u(\\ &= \|u(x+y) - u(x) - u(y)\|^2 \end{aligned}$$

et comme ces quantités valent 0, on en déduit que u est linéaire. C'est donc une isométrie vectorielle, c'est-à-dire un automorphisme orthogonal. □

Exercice 5.8.
On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_\lambda : x \in E \mapsto x + \lambda\langle x, u\rangle u$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_λ soit une isométrie vectorielle.
2. On suppose la condition précédente vérifiée. Déterminer la nature de f_λ.

Solution.

1. Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve la norme, c'est-à-dire $\|f_\lambda(x)\| = \|x\|$. On calcule $\|f_\lambda(x)\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\langle x, u\rangle^2 \|u\|^2 + 2\lambda\langle x, u\rangle\langle x, u\rangle$. Ainsi,

$$\|f_\lambda(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \lambda^2\langle x, u\rangle^2 + 2\lambda\langle x, u\rangle^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\langle x, u\rangle^2 = 0$$

(on divise par $\lambda \neq 0$). Ceci étant valable pour tout x, on en déduit la CNS $\lambda = -2$.

2. On note $u = (a, b, c)$. On calcule $f_{-2}(e_1) = e_1 - 2a$, $f_{-2}(e_2) = e_2 - 2b$ et $f_{-2}(e_3) = e_3 - 2c$. Donc la matrice de f_{-2} est $A = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$. Comme f_{-2} est une isométrie vectorielle, alors ${}^{\mathrm{t}}AA = I_3$. Mais on constate que A est symétrique, donc $A^2 = I_3$, et $f_{-2}^2 = \mathrm{id}$ donc f_{-2} est une symétrie (on pouvait le voir directement en calculant f_{-2}^2).
Il s'agit maintenant de déterminer par rapport à quoi f_{-2} est-elle une symétrie. Pour cela, on chercher les vecteurs invariants. Ce sont les x tels que $f_{-2}(x) = x - 2\langle x, u\rangle u = x$, c'est-à-dire $\langle x, u\rangle = 0$. L'ensemble des vecteurs invariants est donc le plan $u^\perp$ orthogonal à u, et f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

□

Exercice 5.9.
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer les inégalités suivantes : $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

Solution. Prenons $u = (1, ..., 1)$. Alors $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle\right| = |\langle Au, u\rangle| \leqslant \|Au\|\|u\| = \|u\|^2 = n$, où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que A préserve la norme.
Comme A est orthogonale, ses colonnes sont de norme 1, c'est-à-dire $\sum_i a_{i,j}^2 = 1$. On en déduit que $|a_{i,j}| \leqslant 1$, et $|a_{i,j}|^2 \leqslant |a_{i,j}|$. Ainsi, $n = \sum_j 1 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.
Enfin, par inégalité de Cauchy-Schwarz (qu'on applique à la somme de n^2 termes), on obtient, en utilisant le fait que les colonnes sont unitaires : $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \times 1 \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{i,j} 1} = \sqrt{\sum_i 1}\sqrt{n^2} = n^{3/2}$. □

Exercice 5.10.
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une similitude vectorielle s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f = ku$. Montrer que f est une similitude vectorielle si et seulement si elle préserve l'orthogonalité.
(Indication : pour la réciproque, on pourra s'intéresser au rapport $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ pour $x \neq 0$.)

Solution. Si $f = ku$, et alors $\langle f(x), f(y)\rangle = k^2\langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle$, donc ok.
Réciproquement, on considère $v = \frac{x}{\|x\|}$ et $w = \frac{y}{\|y\|}$ unitaires. Alors $\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$, donc $\langle f(v+w), f(v-w)\rangle = 0$, c'est-à-dire $\|f(v)\|^2 = \|f(w)\|^2$, donc $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$. Notons $k > 0$ la valeur commune des rapports $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ pour $x \neq 0$. Alors $u = \frac{1}{k}f$ préserve la norme, c'est-à-dire $u \in \mathcal{O}(E)$, et $f = ku$ est une similitude vectorielle. □

Exercice 5.11.
Déterminer le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, puis de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Solution. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Comme les colonnes sont unitaires, on a $\sum_i a_{i,j}^2 = 1$ donc, à j fixé, tous les $a_{i,j}$ sont nuls sauf un, qui vaut ± 1. Comme les colonnes sont orthogonales, elles ont toutes leur coefficient non-nul sur une ligne différente. Ainsi, A est une matrice de permutation dans laquelle on a autorisé des -1 à la place des 1 ; et réciproquement une matrice de cette forme est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Il y a $n!$ matrices de permutation (avec des 1), et chacune donne 2^n "fausses" matrices de permutations (avec des ± 1). Donc $|\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^n n!$.

En fait, pour choisir une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ on choisit, colonne par colonne, la place du coefficient non-nul et son signe. Il y a $2n$ possibilités pour la première colonne, puis $2(n-1)$ pour la deuxième (on ne peut pas prendre la même ligne !), etc... Donc $|\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = (2n)(2(n-1))...2 = 2^n n!$.

Cette méthode permet de dénombrer $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. En effet, on procède au début comme pour $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, jusqu'à la dernière colonne. Là, on n'a pas le choix du signe : il faut prendre celui qui donnera un déterminant 1. Ainsi, $|\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = \dfrac{|\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})|}{2} = 2^{n-1} n!$. □

Exercice 5.12.
Soit E un espace euclidien.

1. Rappeler le théorème spectral.
2. Soit f et g deux endomorphismes symétriques de E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une base commune, formée de vecteurs propres orthonormés.

Solution. 1. Voir le cours.

2. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f, et E_{λ_i} les sous-espaces propres associés. En diagonalisant f dans une BON (par le théorème spectral), on voit que les E_{λ_i} sont deux à deux orthogonaux. Comme f et g commutent, E_{λ_i} est stable par g donc la restriction g_i de g à E_{λ_i} est bien définie. Elle est symétrique car g l'est, donc par théorème spectral il existe une BON $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de g_i (donc de g), càd qui diagonalise g_i. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ est une BON de E (car les E_{λ_i} sont orthogonaux !). Dans cette base, g est diagonale par construction. De plus, les vecteurs $x \in \mathcal{B}_i$ vérifient $f(x) = \lambda_i x$, donc cette base diagonalise aussi f.

□

Exercice 5.13.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, et $C = A + B$. On note $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A, $\mu_1 \leqslant ... \leqslant \mu_n$ celles de B et $\nu_1 \leqslant ... \leqslant \nu_n$ celles de C. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\lambda_k + \mu_1 \leqslant \nu_k$. Pour cela, on pourra :

1. se ramener au cas où $\mu_1 = 0$, et en déduire que $\langle x, Bx \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;
2. montrer un encadrement du type $\lambda_k \|x\|^2 \leqslant \langle x, Cx \rangle \leqslant \nu_k \|x\|^2$, pour un vecteur x dans un sous-espace vectoriel bien choisi.

Solution. 1. Il suffit de remplacer B par $B - \mu_1 I_n$. On en déduit que $\mu_k \geqslant 0$ pour tout k. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ dans une BON de vecteurs propres

$(g_1, ..., g_n)$ de B, et on a :

$$\langle x, Bx\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \langle g_i, Bg_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mu_i \geqslant 0.$$

2. Soit $(e_1, ..., e_n)$ (resp. $(f_1, ..., f_n)$) une base orthonormée de vecteurs propres de A (resp. de C). Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit les sous-espaces $E = \mathrm{vect}(e_k, ..., e_n)$ (de dimension $n - k + 1$) et $F = \mathrm{vect}(f_1, ..., f_k)$ (de dimension k). Alors $\dim(E) + \dim(F) = n + 1 > n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $E \cap F \neq \varnothing$. Il existe donc $x \in E \cap F \setminus \{0\}$. Comme $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=k}^{n} a_i e_i$, et alors :

$$\langle x, Cx\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle \geqslant \sum_{i=k}^{n}\sum_{k=k}^{n} a_i a_j \langle e_i, Ae_j\rangle + 0 = \sum_{i=k}^{n} a_i^2 \lambda_i \geqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \lambda_k \|x\|^2.$$

De même, $x \in F$ donc $x = \sum_{i=1}^{k} b_i f_i$ et :

$$\langle x, Cx\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{k} b_i b_j \langle f_i, Cf_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \nu_i \leqslant \nu_k \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \nu_k \|x\|^2.$$

Ainsi, $\lambda_k \|x\|^2 \leqslant \langle x, Cx\rangle \leqslant \nu_k \|x\|^2$ et comme $x \neq 0$ on obtient $\lambda_k \leqslant \nu_k$.

□

Exercice 5.14 (Cochran-Fischer).
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u_1, ..., u_p$ des endomorphismes symétriques de E. On suppose que $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{rg}(u_k) = n$, et que $\sum_{k=1}^{p} \langle u_k(x), x\rangle = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que $E = \mathrm{im}(u_1) \oplus ... \oplus \mathrm{im}(u_p)$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, u_k est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{im}(u_k)$.
3. Montrer que les $\mathrm{im}(u_k)$ sont orthogonaux deux à deux.

Solution. 1. Soit $v = u_1 + ... + u_p - \mathrm{id}$. Par hypothèse, on a $\langle v(x), x\rangle = 0$ pour tout x. Comme v est symétrique (car les u_k le sont), elle est diagonalisable. Soit λ une valeur propre et x un vecteur propre, on a $\lambda \|x\|^2 = \langle v(x), x\rangle = 0$, donc $\lambda = 0$. Comme toutes les valeurs propres de v sont nulles et que v est diagonalisable, on en déduit $v = 0$. Donc $\mathrm{id} = u_1 + ... + u_p$ et $E = \mathrm{im}(u_1) + ... + \mathrm{im}(u_p)$. Comme on a supposé $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{rg}(u_k) = n$, alors finalement $E = \mathrm{im}(u_1) \oplus ... \oplus \mathrm{im}(u_p)$.

2. On sait que les u_k sont symétriques, et qu'un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est symétrique. Il suffit donc de montrer que u_k est un projecteur.

Avec $\mathrm{id} = u_1 + ... + u_p$, on a $u_k(x) = u_1(u_k(x)) + ... + u_p(u_k(x))$. Par unicité de l'écriture dans $E = \mathrm{im}(u_1) \oplus ... \oplus \mathrm{im}(u_p)$, on en déduit $u_k(x) = u_k^2(x)$ et $u_j(u_k(x)) = 0$ pour $j \neq k$. Ceci étant vrai pour tout x, on a $u_k = u_k^2$, donc u_k est un projecteur. Finalement, c'est un projecteur orthogonal sur son image.

3. Pour $j \neq k$, on a vu que $u_j u_k = 0$, donc $\mathrm{im}(u_k) \subset \ker(u_j)$. Comme u_k est un projecteur orthogonal, on a $\ker(u_j) = \mathrm{im}(u_j)^\perp$, donc $\mathrm{im}(u_k) \subset \mathrm{im}(u_j)^\perp$, c'est-à-dire $\mathrm{im}(u_k)$ et $\mathrm{im}(u_j)$ sont orthogonaux.

$\square$

Exercice 5.15.

Soit E un espace euclidien, et p, q des projecteurs orthogonaux de E. Montrer que E est somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 et stables par p et q.

Solution. On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$ ou 2, c'est évident. On suppose que c'est vrai pour les espaces euclidiens de dimension au plus $n - 1$. Soit E de dimension n. Comme p et q sont des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques. Puisque l'orthogonal d'un sev stable par un endomorphisme symétrique est aussi stable, alors il suffit de trouver un sous-espace F de dimension 1 ou 2 stable par p et q, puis d'écrire $E = F \oplus^\perp F^\perp$ et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$.

Montrons donc l'existence de F. Si F existe et si $x \in F$, alors comme F est de dimension au plus 2 et stable par p et q on a une relation linéaire entre x, $p(x)$ et $q(x)$: $ap(x)+bq(x) = cx$. Cela fait (vaguement ?) penser à une relation du type $u(x) = \lambda x$... On considère donc l'endomorphisme $p + q$. Il est symétrique donc par théorème spectral il admet une valeur propre réelle λ. Soit x un vecteur propre associé, et $F = \mathrm{vect}(x, p(x))$. Alors $\dim(F) \leqslant 2$, F est stable par p (évident), et on a $q(x) = \lambda x - p(x) \in F$ et $q(p(x)) = q(\lambda x - q(x)) = (\lambda - 1)q(x) \in F$, donc F est aussi stable par q. $\square$

6 Études asymptotiques

Exercice 6.1.

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d(j)$.

Solution. On a $d(j) = \displaystyle\sum_{i|j} 1$ donc $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i|j} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i|j, j\leqslant n}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]$ car la dernière somme est indicée sur les multiples de i plus petits que n, càd $i, 2i, ..., \left[\frac{n}{i}\right] i$. Or, $\frac{n}{i} \leqslant \left[\frac{n}{i}\right] \leqslant \frac{n}{i} + 1$ et donc $n\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \leqslant S_n \leqslant n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + n$. Comme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \ln(n) + O(1)$ (comparaison avec une intégrale), alors $S_n \sim n\ln(n)$.

(L'équivalent de la somme partielle de la série harmonique vient d'une comparaison avec une intégrale.) ☐

Exercice 6.2.
Déterminer un équivalent de $\ln(n!)$.

Solution. On a $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. On encadre avec une intégrale et on a $\ln(n!) \sim n\ln(n)$. ☐

7 Séries et familles sommables

7.1 Séries numériques et vectorielles

Exercice 7.1.
Soit $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Déterminer la nature et éventuellement la somme de :
1. $\sum u_n^2$,
2. $\sum \ln(1-u_n)$,
3. $\sum u_n$.

Solution. L'étude rapide de la suite $(u_n)_n$ montre qu'elle est strictement positive et décroît vers 0. Ainsi :

1. En utilisant un télescopage, on montre que $\sum u_n^2$ converge vers u_0.

2.-3. On a $\ln(1-u_n) \sim -u_n$. Les séries $\sum \ln(1-u_n)$ et $\sum u_n$ sont donc de même nature. Comme $1 - u_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, on a $\sum_{k=0}^{n} \ln(1-u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$, qui tend vers $-\infty$. Les deux dernières séries ne convergent donc pas.

☐

Exercice 7.2.
Déterminer la nature de $\sum (1+\frac{1}{n})^{-n}$ et de $\sum \ln(n)^{-\ln(n)}$.

Solution. On écrit $(1+\frac{1}{n})^{-n} = \exp(-n\ln(1+\frac{1}{n}))$. Comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, alors $(1+\frac{1}{n})^{-n}$ tend vers e^{-1} donc la série diverge grossièrement.

On écrit $\ln(n)^{-\ln(n)} = \exp(-\ln(n)\ln(\ln(n))) = n^{-\ln(\ln(n))}$. Pour n assez grand, $\ln(\ln(n)) > 2$ donc $\ln(n)^{-\ln(n)} < n^{-2}$, d'où la convergence de la série. ☐

Exercice 7.3.
Déterminer la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Solution. le terme général est alterné et tend vers 0, mais il n'est pas facile de voir que son module décroît : on n'arrive pas à appliquer le critère de Leibniz.

Faisons autrement. Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$, on a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$. Attention ! Ceci n'est pas de signe constant, on ne peut pas utiliser les théorèmes de comparaison qui sont vrais pour les séries à termes positifs !

Posons $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ et $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$, de sorte que $u_n = v_n + w_n$. On applique sans soucis le critère de Leibniz à w_n, qui montre que $\sum w_n$ converge.

Pour v_n, on utilise le DL $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de $x = 0$. Il donne $w_n = -\frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, donc $w_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. Par comparaison (on a le droit car w_n et $\frac{-1}{2n^2}$ sont de signe constant après un certain rang), on trouve que $\sum w_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge. □

Exercice 7.4 (Critère de condensation de Cauchy).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive décroissante. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ ont la même nature.

Application : déterminer la nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α.

Solution. On écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} a_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k$. Dans cette dernière somme, on peut majorer a_k par a_{2^j} ou le minorer par $a_{2^{j+1}}$. On obtient l'encadrement

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

qui permet de conclure.

Avec $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a $2^n a_{2^n} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})^n$. La série correspondante est une série géométrique qui converge si et seulement si $|2^{1-\alpha}| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $1-\alpha < 0$ donc $\alpha > 1$. □

Exercice 7.5.
Soit $a_n > 0$ tel que $\sum a_n$ converge. Notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

1. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{R_k} \geqslant 1 - \frac{R_{n+p}}{R_n}$. En déduire que $\sum \frac{a_n}{R_n}$ diverge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\dfrac{a_n}{\sqrt{R_n}} \leqslant 2(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})$. En déduire que $\sum \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ converge.

Solution. 1. On a $R_k \leqslant R_n$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} a_k = R_n - R_{n+p}$, d'où la minoration. Quand p tend vers $+\infty$, on a $R_{n+p} \to 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{R_k} \geqslant 1 - \frac{1}{R_n}$. Si n_0 est assez grand, on a $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (car $\sum a_n$ converge), et alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{R_k} \geqslant \frac{1}{2}$: les restes de $\sum \frac{a_n}{R_n}$ ne tendent pas vers 0, donc la série ne converge pas.

2. On remarque que $a_n = R_n - R_{n+1}$, que $R_{n+1} \leqslant R_n$ et que $\frac{\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}}{R_n-R_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}}}$. On assemble tout ceci pour obtenir l'inégalité. On en déduit la convergence de la série par télescopage.

$\square$

Exercice 7.6.
Soit $u_n \geqslant 0$ et $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Comparer la nature de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$.

Solution. Supposons que $\sum u_n$ converge. Si $n^2u_n \not\to +\infty$ alors $v_n \not\to 0$, donc $\sum v_n$ diverge. Si $n^2u_n \to +\infty$, supposons que $\sum v_n$ converge. Alors par inégalité artihmético-géométrique, $\sum \sqrt{u_nv_n}$ converge. Or, $u_nv_n = \frac{u_n}{1+n^2u_n} \sim \frac{1}{n^2}$, ce qui contredit la convergence de $\sum \sqrt{u_nv_n}$.
Supposons que $\sum u_n$ diverge. Alors on ne peut rien dire de $\sum v_n$. En effet, si par exemple $u_n = 1$ alors $\sum v_n$ converge ; et si $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\sum v_n$ diverge. $\square$

Exercice 7.7.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, C)$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{[n,n+1]} |f'|.$$
2. En déduire la nature de $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Solution. Voir Théo Untrau.

1. Rentrer $f(n)$ dans l'intégrale et faire une IAF.
2. Appliquer la question 1 avec $f(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t}$. (Il va falloir montrer ou admettre que $\cos(\ln(n))$ n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$.)

$\square$

Exercice 7.8.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des réels positifs.

1. Si $u_n = o(\frac{1}{n})$, a-t-on $\sum u_n$ convergente ?
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $\sum u_n$ converge, montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.
3. Si on enlève l'hypothèse de décroissance mais que $\sum u_n$ converge, a-t-on encore $u_n = o(\frac{1}{n})$?

Solution. 1. Non, série de Bertrand.

2. $(n-n_0)u_n \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon$ si n_0 est assez grand, par monotonie de $(u_n)_n$ et convergence de la série. Donc $0 \leqslant nu_n \leqslant \varepsilon + n_0 u_n$. Comme $u_n \to 0$ car la série converge, alors si n est assez grand $0 \leqslant nu_n \leqslant 2\varepsilon$.

3. Non, prendre $u_n = \frac{1}{n}$ si $n = k^2$ et $u_n = 0$ sinon.

□

Exercice 7.9.
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries convergentes de nombres complexes, de sommes A et B. On note $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Soit enfin $M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} M_n = AB$.

Solution. Si les séries étaient absolument convergentes, ce serait ok par produit de Cauchy et théorème de Cesaro. On va montrer que ça marche même si les séries convergent, mais pas absolument. Notons A_n et B_n les sommes partielles associées à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. On a

$$C_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{p=k}^{n} b_{p-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k$$

$$\sum_{n=0}^{N} C_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{N} B_k \sum_{n=k}^{N} a_{n-k} = \sum_{n=0}^{N} B_k A_{n-k}$$

donc $M_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} B_k A_{n-k}$. Alors :

$$|M_N - AB| = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} |A_{n-k}B_k - AB| \leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(|A_{n-k}-A||B_k| + |A||B_k - B|).$$

On peut borner B_k par une constante car $(B_k)_k$ converge vers B. Puis par Cesaro, la somme de droite converge vers 0, ce qui donne le résultat. □

Exercice 7.10.
Soit $u_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Solution. On a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{e^4}{2^n}$ donc la série converge. Pour la calculer, on l'écrit comme un produit de Cauchy entre une série exponentielle et une série géométrique. On a

$$e^b \frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k!}a^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sum_{k=0}^{n}\frac{(a/b)^k}{k!}.$$

Si on prend $a = \frac{1}{2}$ et $b = 2$ on trouve $2e^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. $\square$

Exercice 7.11.
Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$.

1. Si $\sum u_n$ converge absolument, montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.
2. Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

Solution. 1. On remarque que $\sum v_n$ est le produit de Cauchy entre $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$, qui sont deux séries absolument convergentes. Donc $\sum v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2. Montrons d'abord que $(v_n)_n$ tend vers 0. Il existe N tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N} 2^k |u_k| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} 2^k \varepsilon = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N} 2^k |u_k| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

si n est assez grand. Donc $(v_n)_n$ tend vers 0. Puis, on a

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \times 2 \left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right) = 2 \sum_{k=0}^{N} u_k - v_N$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ car $v_N \to 0$.

$\square$

Exercice 7.12.
Construire une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|z_n - z_m| \geqslant 1$ pour $n \neq m$ et $\sum \dfrac{1}{|z_n|^2}$ diverge.

Solution. On va prendre un maximum de z_n possible sur chacun des cercles de centre 0 et de rayon k pour $k \in \mathbb{N}^*$. Les points situés sur deux cercles différents respectent bien la première condition. Si on trace N cordes successives de longueur 1 sur le cercle de rayon k, sans qu'aucune corde n'en recoupe une autre, la longueur de la ligne brisée formée par ces cordes est plus petite que le périmètre du cercle, càd $N \leqslant 2k\pi$. On peut donc tracer $n_k = \lfloor 2k\pi \rfloor$ telles cordes, qui donnent autant de points sur le cercle à distance au moins 1 les uns des autres. Ainsi, pour $k \geqslant 1$ et $n_{k-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_{k-1} + n_k$, on prend z_n sur le cercle de rayon $k+1$.

Ainsi construite, la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la première condition. Montrons qu'elle vérifie aussi la deuxième. Par sommation par paquets, la série $\sum \dfrac{1}{|z_n|^2}$ a la même nature que $\sum \dfrac{n_k}{k^2}$. Or, $n_k \sim 2k\pi$, donc cette dernière série diverge. $\square$

Exercice 7.13.
Soit une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|z_n - z_m| \geqslant 1$ pour $n \neq m$ et $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Montrer que $\sum \frac{1}{|z_n|^3}$ converge.

Solution. Soit $A_N = \{n \in \mathbb{N} \mid |z_n| \leqslant N\}$. Par croissance de $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, si $n \in A_N$ alors tout $k \leqslant n$ est dans A_N. Géométriquement, la condition $|z_n - z_m| \geqslant 1$ s'interprète ainsi : les boules de centre z_n et de rayon $\frac{1}{2}$ sont disjointes. La réunion disjointe de ces boules pour $z_n \in A_N$ est incluse dans $B(0, N+\frac{1}{2})$. Cela se traduit par une inégalité entre les aires : $|A_N| \times \frac{\pi}{4} \leqslant \pi\left(N+\frac{1}{2}\right)^2$ donc $|A_N| \leqslant (2N+1)^2$. Donc on a $|z_{(2N+1)^2+1}| > N$ càd $\frac{1}{|z_{N^2}|} = O\left(\frac{1}{N}\right)$, puis par croissance de la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la fonction $\sqrt{\cdot}$ on a $\frac{1}{|z_n|} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, puis $\frac{1}{|z_n|^3} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, ce qui montre que la série converge. ☐

Exercice 7.14.
Pour $k \geqslant 2$ on pose $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$. Montrer que $\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1) = 1$.

Solution. La série à termes positifs définissant $\zeta(k)$ est bien convergente. De plus, on a $\zeta(k)-1 = \frac{1}{2^k} + \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{2^k} + \int_2^{+\infty}\frac{1}{t^k}dt = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}$. Donc $\sum(\zeta(k)-1)$ converge, par comparaison à une série géométrique. De plus, comme les termes sont positifs, les séries sont en fait absolument convergentes, donc on peut échanger les signes $\sum$, ce qui donne :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1) = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

☐

7.2 Ensembles dénombrables

Exercice 7.15 (Nombres algébriques).
Un réel x est un nombre algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Solution. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré d est équipotent à $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^*$, qui est dénombrable. Un polynôme de degré d au plus d racines, donc l'ensemble des nombres algébriques de degré d est une union dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable. L'ensemble des nombres algébriques est alors dénombrable comme union dénombrable de tels ensembles. ☐

Exercice 7.16.

Montrer que l'ensemble des suites d'entiers presque nulles (c'est-à-dire nulles après un certain rang) est dénombrable.

Solution. Si E_n est l'ensemble des suites nulles après le rang n (inclus), alors E_n est équipotent à $\mathbb{Z}^n$ donc est dénombrable, et E est dénombrable comme union dénombrable des E_n. $\square$

7.3 Familles sommables

Exercice 7.17.

1. Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente, et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument, et qu'elle a la même somme que $\sum u_n$.
2. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer la convergence de $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$.
   Majorer sa somme indépendant de σ. Cette majoration est-elle optimale ?
3. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer la divergence de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.
   Minorer les sommes partielles indépendamment de σ. Cette minoration est-elle optimale ?
   (Indication : montrer que si une série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\left|\sum_{n=N+1}^{2N} u_n\right| < \varepsilon$.)

Solution.

1. $\sum_{k=0}^{n} \|u_{\sigma(k)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$ donc $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument. Soit ε et N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\| \leqslant \varepsilon$. Soit N' tel que $\{0, ..., N\} \subset \{\sigma(0), ..., \sigma(N')\}$ (on a $N' \geqslant N$). On a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}\right\| &\leqslant \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n\right\| + \left\|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)}\right\| + \left\|\sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}\right\| \\ &\leqslant \varepsilon + \left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right\| + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

2. Par inégalité de Cauchy-Schwarz et la question précédente ça converge, et on obtient $\frac{\pi^2}{6}$ comme majoration optimale (on a l'égalité si $\sigma = \mathrm{id}$).
3. On calcule $\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geqslant \frac{1}{4N^2} \sum_{n=N+1}^{2N} \sigma(n) \geqslant \frac{1}{4N^2} \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N+1}{8N} \geqslant \frac{1}{8}$, ce qui nie le critère de Cauchy, d'où la divergence. On utilise Cauchy-Schwarz pour minorer :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{\sigma(n)}}{n} \frac{1}{\sqrt{\sigma(n)}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma(n)}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sigma(n)}\right) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma(n)}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)$$

d'où la minoration optimale par les sommes partielles de la série harmonique.

$\square$

Exercice 7.18.
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$.

Solution. On va montrer que ça diverge. Par sommation par paquets (positifs), la série a la même nature que $\sum a_N$ pour $a_N = \displaystyle\sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$. Or, $a_N \geqslant \displaystyle\sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{\sigma(n)}{(2^{N+1})^2 \ln(2^{N+1})}$. Dans cette somme, il a y au moins 2^{N-1} indices tels que $\sigma(n) \geqslant 2^{N-1}$ (car il y a 2^N éléments $\sigma(n)$ tous différents), donc on a $a_N \geqslant 2^{N-1} \dfrac{2^{N-1}}{(2^{N+1})^2 \ln(2^{N+1})} = \dfrac{1}{16(N+1)\ln(2)}$, d'où la divergence. $\square$

Exercice 7.19.
Une famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite de carré sommable si $(u_i^2)_{i \in I}$ est sommable.

1. Montrer que si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors elle est de carré sommable. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont de carrés sommables, alors $(u_i v_i)_{i \in I}$ est sommable.
3. Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont de carrés sommables, a-t-on $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times I}$ sommable ?

Solution.
1. Comme $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors l'ensemble $J = \{i \in I \mid u_i > 1\}$ est fini. Pour $i \in I \setminus J$, on a $|u_i|^2 \leqslant |u_i|$ donc $(u_i^2)_{i \in I \setminus J}$ est sommable. Comme $(u_i^2)_{i \in J}$ l'est aussi (car J est fini), alors ok par sommation par paquets. La réciproque est fausse : $u_i = \frac{1}{i}$.
2. On a $|u_i v_i| \leqslant \frac{|u_i|^2 + |v_i|^2}{2}$.
3. Non : $u_i = v_i = \frac{1}{i+1}$. En fixant $i = 0$, la famille $(u_0 v_j)_j$ n'est pas sommable.

$\square$

8 Suites et séries de fonctions, séries entières

8.1 Suites et séries de fonctions

Exercice 8.1.
Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par $\varphi(x) = 2x(1-x)$. On pose $\varphi_n = \varphi \circ ... \circ \varphi$. Soit $I = [a,b] \subset]0,1[$.

1. Montrer que $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers $x \mapsto \frac{1}{2}$ sur I.
2. Montrer que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \frac{1}{2}$ sur I.

Solution. 1. Le maximum de φ est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{2}$. Comme $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ alors $\varphi([0,1]) = [0, \frac{1}{2}]$. De plus, sur $[0, \frac{1}{2}]$ on a $\varphi(x) \geqslant x$ avec égalité ssi $x = 0$ ou $\frac{1}{2}$. Donc pour $x \in I$ la suite $(\varphi_n(x))_n$ est croissante (au pire à partir du second rang) majorée par $\frac{1}{2}$ donc converge. La limite ℓ vérifie $\ell = \varphi(\ell)$ et $\ell > 0$ (car $0 < x < 1$) donc $\ell = \frac{1}{2}$. D'où la CVS.

2. On écrit $\varphi(I) = \varphi([a,b]) = [\alpha, \beta] \in]0,1]$. On a pour $x \in I$ on a $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}$ et par croissance de φ sur $[0, \frac{1}{2}]$ on a $\varphi_n(\alpha) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $\varphi_n(\alpha) \to \frac{1}{2}$ d'après la première question, alors on obtient la CVU.

□

Exercice 8.2 (Second théorème de Dini).
Soit $I = [a,b]$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I. On suppose que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I. Si les f_n sont croissantes, montrer que la convergence est uniforme.

Solution. Par théorème de Heine (f est continue sur un segment donc uniformément continue), pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x) - f(x)| < \varepsilon$. Soit $a = x_1 < ... < x_n = b$ une subdivision de I telle que $|x_{i+1} - x_i| < \eta$. Comme $f_n(x_i)$ tend vers $f(x_i)$, il existe N tel que si $n \geqslant N$ on a $|f(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon$ (et on peut prendre le même N pour tous les x_i car ils sont en nombre fini). Donc pour $n \geqslant N$ on a

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| \leqslant 2\varepsilon$$

et pareil avec $|f(x_i) - f_n(x_{i+1})|$.

De plus, f est croissante car les f_n le sont, donc

$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant f(x_{i+1}) - f_n(x_i)$$

pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Donc, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et $x \in I$, d'où le résultat. □

Exercice 8.3 (Limites uniformes de polynômes).

1. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale, puis que $(P_n')_n$ converge uniformément vers f'.
2. Ces résultats sont-ils vrais si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I ?

Solution. 1. Par CVU, il existe N tel que pour $n \geqslant N$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - P_n(x)| < 1$. Alors on a $|P_n(x) - P_N(x)| < 2$ par inégalité triangulaire. Donc pour $n \geqslant N$, $P_n - P_N$ est un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ donc constant : il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + a_n$. La suite $(P_n(0))_n$ converge, donc $(a_n)_n$ aussi, notons a sa limite. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P_N(x) + a$ donc f est polynomiale.

Avec le même N que ci dessus, le polynôme $f - P_n$ est borné donc constant pour $n \geqslant N$. Donc $f' - P_n' = 0$ et la suite $(P_n')_n$ est constante égale à f' après un certain rang, donc elle CVU vers f'.

2. Si I est un segment, le résultat n'est pas vrai (théorème de Weierstrass). Si I est borné on peut l'inclure dans un segment et ce qui précède montre que le résultat n'est pas vrai. Si I n'est pas borné, le raisonnement effectué en 1 marche : un polynôme borné sur un intervalle non-borné est constant, donc le résultat est vrai dans ce cadre.

$\square$

Exercice 8.4.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)x^n dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est nulle.

Solution. Par linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)P(x)dx = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. On utilise le théorème de Weierstrass. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_a^b f(x)^2 dx &= \int_a^b f(x)(f(x) - P(x))dx + \int_a^b f(x)P(x)dx \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)||f(x) - P(x)|dx + 0 \\
&\leqslant \varepsilon \int_a^b \|f\|_\infty dx \\
&\leqslant (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ donc que $f^2 = 0$ car f est continue, puis $f = 0$. $\square$

Exercice 8.5.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on considère $f(x) = \cos(x)^n \sin(x)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.
2. Soit $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que pour tout $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.
3. Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx \neq 0$. Quelle hypothèse manque-t-il pour appliquer le théorème de primitivation ?

Solution.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in [0, \varepsilon[$ on a $0 \leqslant \sin(x) < \varepsilon$ donc $0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$. Pour $x \in [\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant \cos(x)^n \leqslant \cos(\varepsilon)^n \to 0$, donc il existe N tel que pour $n > N$ on a $0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$. Finalement, pour tout $n > N$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$, d'où la CVU.
2. Sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ on a $|g_n(x)| \leqslant (n+1)\cos(\delta)^n \to 0$, d'où la CVU.
3. On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx = [-\cos(x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ donc la limite voulue vaut 1. On ne peut pas appliquer le théorème de primitivation car on n'a pas montré le convergence uniforme sur tout compact de $[0, \frac{\pi}{2}]$, mais seulement sur tout compact de $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ pour $\delta > 0$. Ainsi, le théorème de primitivation donnerait $\lim_n \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} g_n = 0$.

□

Exercice 8.6 (Convergence des sommes de Riemann).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on considère $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$.

1. Vers quoi converge simplement la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Solution.

1. On reconnaît une somme de Riemann de pas $\frac{1}{n}$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Comme f est continue, alors $f_n(x) \to \int_x^{x+1} f(t)dt$.
2. On veut montrer que $u_n(x) = \left| f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt \right|$ tend uniformément vers 0 sur $[a, b]$. Pour cela on écrit :
$$u_n(x) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right) - \int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} f(t)dt \right) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} \left| f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f sur $[a, b+1]$ (théorème de Heine), il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or, il existe N tel que $\frac{1}{n} < \delta$ pour tout $n > N$. Alors pour $n > N$ et $t \in [x + \frac{k}{n}, x + \frac{k+1}{n}]$ on a $\left| f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \leqslant \varepsilon$ donc pour tout $x \in [a, b]$, $u_n(x) \leqslant n \times \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ d'où la CVU sur $[a, b]$.

□

Exercice 8.7.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que cette série converge simplement.
2. Montrer que la convergence n'est pas normale.
3. La convergence est-elle uniforme ?

Solution.

1. Pour $x > 0$ et si n est assez grand, alors $\dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant xe^{-nx}$ donc la série converge. Pour $x = 0$, c'est évident. Donc la série CVS.
2. On étudie $f_n : x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ pour trouver son maximum. On a $f_n'(x) = \dfrac{(1 - nx)e^{nx}}{\ln(n)}$, donc f_n croît puis décroît, et atteint un maximum en en $x = \dfrac{1}{n}$, et on a $\|f\|_\infty = f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{e^{-1}}{n\ln(n)}$. Comme $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, la convergence n'est pas absolue.
3. On va montrer que la convergence est uniforme, on montrant que le reste tend uniformément vers 0. Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\ln(t)}$ est décroissante (au moins sur un voisinage de $+\infty$) et positive, donc pour k dans $\mathbb{N}$ assez grand on a $0 \leqslant \dfrac{e^{-kx}}{\ln(k)} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{e^{-tx}}{\ln(t)} dt$.

Ainsi, on peut majorer le reste :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)} \leqslant x \int_n^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\ln(t)} dt \leqslant \frac{x}{\ln(n)} \int_n^{+\infty} e^{-tx} dt \leqslant \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}.$$

D'où la convergence uniforme des restes vers 0, donc la CVU de la série.

□

Exercice 8.8.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une suite de fonctions $(f_n)_n$ par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$. Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Solution. On va montrer que la série CVN. Comme f est continue sur le compact $[a, b]$ elle est bornée ; soit M un majorant. On montre par récurrence que $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M(x-a)^n}{n!}$. Pour $n = 0$ c'est ok par choix de M. On suppose ceci vrai pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors $|f_{n+1}(x)| \leqslant \displaystyle\int_a^x \frac{M(t-a)^n}{n!} dt = \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. On en déduit que $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{M(b-a)^n}{n!}$, puis que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc que la série des f_n CVN.

En fait, on peut même expliciter la limite. En effet, une récurrence immédiate montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f_n' = f_{n-1}$. Ainsi, la majoration précédente montre que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ CVN aussi. On peut alors dériver terme à terme. Si g est la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$, on obtient $g' = f_0 + g$. Pour résoudre cette équation différentielle on applique la méthode de variation de la constante. Une solution homogène est donnée par $h(x) = \lambda e^x$. On cherche donc g sous la forme $g(x) = \lambda(x)e^x$. En dérivant, on obtient $(\lambda'(x) + \lambda(x))e^x = f(x) + g(x)$ c'est-à-dire $\lambda'(x) = e^{-x} f(x)$. On trouve donc $g(x) = \left(\displaystyle\int_a^x e^{-t} f(t)dt + \lambda(a)\right) e^x$. Or, comme $g(a) = 0$ on a aussi $\lambda(a) = 0$. Finalement, la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est donnée par

$$x \mapsto g(x) + f(x) = \left(\int_a^x e^{-t} f(t)dt\right) e^x + f(x).$$

□

Exercice 8.9.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ (quand ceci a du sens).

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition, et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et exprimer ses dérivées sous forme de séries.

Solution. 1. Pour $x \leqslant 0$ la série diverge grossièrement. Pour $x > 0$ elle converge simplement (comparer avec $\frac{1}{n^2}$ par exemple). Donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On note $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$. Les f_n sont continues. Soit $a > 0$. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$ on a $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{e^{-an}}{\sqrt{n}}$, donc la série CVU. Donc sa somme f est continue sur tous les $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par CVU sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = 0$.

3. On calcule $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{k-\frac{1}{2}} e^{-nx}$ donc la série $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur les $[a, +\infty[$ pour $a > 0$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^k n^{k-\frac{1}{2}} e^{-nx}$.

□

Exercice 8.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Peut-on appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions ?
3. Montrer que f n'est pas dérivable 0.

Solution. 1. On note $f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. Alors les f_n sont continues et $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$. Donc $\sum f_n$ CVN donc CVU sur $\mathbb{R}$ (sans passer par la CVN, on peut dire que les séries des restes CVU vers 0 en la majorant par le reste d'une série géométrique), donc sa somme f est bien définie et est continue.

2. Non ! En effet, $f_n'(x) = \cos(2^n x)$ donc pour $x = \pi$ (et $n \geqslant 1$) on a $f_n'(\pi) = 1$: la série $\sum f_n'$ ne peut pas converger uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, puisqu'elle diverge grossièrement pour $x = \pi$.

3. On va construire une suite $(x_k)_k$ qui tend vers 0 mais telle que le taux d'accroissement $\frac{f(x_k)}{x_k}$ n'a pas de limite. Prenons $x_k = \frac{\pi}{2^k}$. Alors dans $f(x_k)$, les termes pour $n \geqslant k$ sont nuls (car $\sin(2^{n-k}\pi) = 0$). Ainsi, $\frac{f(x_k)}{x_k} = \sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2^{n-k}\pi)}{2^{n-k}\pi}$. Or, sur $[0, 2\pi]$ on a $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$. Donc $\frac{f(x_k)}{x_k} \geqslant k\frac{2}{\pi}$ et $\frac{f(x_k)}{x_k} \to +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

□

Exercice 8.11.
On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(x)^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = -1$. En déduire f.

Solution. 1. On majore $\dfrac{\sin(nx)}{n}$ par 1. Comme $0 < x < \pi$ alors $|\cos(x)| < 1$ donc il reste une série géométrique. Ainsi, la série CVS donc f est bien définie sur $]0, \pi[$.

En fait, avec $[a,b] \subset]0,\pi[$ et $f_n(x) = \dfrac{\cos(x)^n \sin(nx)}{n}$ on a $f_n'(x) = \cos(x)^{n-1}\cos((n+1)x)$ (utiliser la formule pour $\cos(p+q)$ avec $p = nx$ et $q = x$), donc la série des dérivées CVU aussi sur $[a,b]$. Comme la série CVS, on peut utiliser le théorème de dérivation : la somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $]0,\pi[$ donc sur $]0,\pi[$, et sa dérivée est $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos(x)^{n-1}\cos((n+1)x)$.

2. On calcule cette somme en passant en complexe : $f'(x) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos(x)^{n-1} e^{i(n+1)x}\right)$. Or, on a $\cos(x)^{n-1}e^{i(n+1)x} = e^{2ix}(\cos(x)e^{ix})^{n-1}$ et par somme géométrique (car $|\cos(x)| < 1$) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{Re}\left(e^{2ix}\frac{1}{1-\cos(x)e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix}\frac{1-\cos(x)e^{-ix}}{|1-\cos(x)e^{ix}|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}+\cos(x)e^{ix}}{(1-\cos(x)^2)^2-\cos(x)^2\sin(x)}\right. \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}-\cos(x)e^{ix}}{\sin(x)^2}\right) = \frac{\cos(2x)-\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{-\sin(x)^2}{\sin(x)^2} = -1. \end{aligned}$$

Donc $f(x) = -x + C$. On calcule $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) = -x + \dfrac{\pi}{2}$.

□

8.2 Séries entières

Exercice 8.12.
Soit $\sum a_b z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de convergence $R, R' > 0$.

1. Montrer que le rayon de convergence R'' de $\sum c_n z^n$ (avec $c_n = a_n b_n$) vérifie $RR' \leqslant R''$.
2. Donner un exemple où :
   (a) $RR' = R''$,
   (b) $RR' < R''$.

Solution. 1. Soit $0 < r'' < RR'$, il existe $0 < r < R$ tel que $0 < r'' < rR' < RR'$. Alors $r' = \dfrac{r''}{r}$ vérifie $r'' = rr'$ et $0 < r' < R'$. Comme les suites $(a_n r^n)_n$ et $(b_n r'^n)_n$ sont bornées, alors la suite $(c_n r''^n)_n$ l'est aussi, donc par lemme d'Abel on a $R'' \geqslant RR'$.

2. (a) $\sum z^n$ et $\sum z^n$. Plus généralement, $\sum a^n z^n$ avec $\sum b^n z^n$.
   (b) $\sum z^{2n}$ avec $\sum z^{2n+1}$.

□

Exercice 8.13.
Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

Solution. En regardant avec la "réciproque" de la règle de d'Alembert (on rappelle que cette réciproque n'existe pas), on peut conjecturer que $R' = R^2$. C'est ce qu'on va montrer. Soit $0 < r < R^2$. La suite $(a_n^2 r^n)_n = ((a_n \sqrt{r}^n)^2)_n$ est bornée car $0 < \sqrt{r} < R$. Donc $R' \geqslant R^2$. Soit maintenant $r > R^2$. Comme $a_n \sqrt{r}^n$ n'est pas bornée, alors $a_n^2 r^n$ non plus. Donc $r \geqslant R'$, et donc $R'^2 \geqslant R'$. Finalement, $R' = R^2$. □

Exercice 8.14.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum \dfrac{an^2 + bn + c}{n!} x^n$.

Solution. Par critère de d'Alembert, le rayon de convergence est infini. On peut donc calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{an^2 + bn + c}{n!} x^n = a \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = (ax^2 + (a+b)x + c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La somme cherchée est donc $x \mapsto (ax^2 + (a+b)x + c)e^x$. □

Exercice 8.15.
On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$. Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum H_n x^n$.

Solution. On note $a_0 = 0$, $a_k = \dfrac{1}{k}$ et $b_k = 1$. Alors $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$: c'est un produit de Cauchy. Le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ valant 1, alors $R \geqslant 1$. De plus, la somme est par produit de Cauchy $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$. On voit alors que $R = 1$, car cette fonction n'a pas de limite quand $x \to 1$.

Sans produit de Cauchy, on peut voir que $R = 1$ par critère de d'Alembert. On peut calculer la somme ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(H_{n-1} + \frac{1}{n} \right) x^n = x + x \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

donc en notant f la somme cherchée, on a $(1-x)f(x) = -\ln(1-x)$. □

Exercice 8.16.
Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1 + t + t^2}$.

Solution. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où le DSE est valide pour $|x| < 1$ et où $a_n = 1$ (resp. $-1, 0$) si $n = 0 \mod 3$ (resp. 1, 2). Par intégration

terme à terme sur le domaine de convergence, on a pour $|x| < 1$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + f(0)$.
Il reste à calculer $f(0)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\frac{3}{4} + (t+\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3} \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2} \\ &= \frac{4 \times \sqrt{3}}{3 \times 2} \int_{-\infty}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Bref, $f(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{8\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. □

Exercice 8.17 (Théorème d'Abel).
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de la série sur $]-R, R[$.

1. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Montrer que $f(x) \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum a_n R^n$. On pourra au préalable montrer que $f(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ pour $x \in]-R, R[$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k$.
2. Application : montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution. 1. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k = \lim_n S_n$. Soit $x \in]-R, R[$ et $n > 0$, par transformation d'Abel on a (avec la convention $S_{-1} = 0$) :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} S_k \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} = S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{k=0}^{n-1} S_k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Comme $(S_n)_n$ est bornée (car convergente) et que $|x| < R$, alors $S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n \to 0$. Comme le membre de gauche dans l'égalité converge (vers $f(x)$), alors la somme à droite converge aussi, et on obtient $f(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n$.

On s'intéresse alors à

$$f(x) - S = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} S \left(\frac{x}{R}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S_n \to S$, il existe $N > 0$ tel que si $n > N$ alors $|S_n - S| < \varepsilon$. Alors pour $0 < x < R$,

$$\begin{aligned} |f(x) - S| &\leqslant \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=N+1}^{+\infty} |S_n - S| \left(\frac{x}{R}\right)^n \\ &\leqslant \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \left(\frac{x}{R}\right)^n + \varepsilon \end{aligned}.$$

Or, si $x \to R$ alors le premier terme tend vers 0, donc il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]R-\delta, R[$ on a $|f(x) - S| \leqslant 2\varepsilon$. D'où le résultat.

2. On reconnaît le développement de arctan, et on a $R = 1$. Ici, la série converge (série alternée), et donc sa somme vaut $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\square$

Exercice 8.18.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente associée à $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, avec $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire $a_{n+1} = f(a_n)$).

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence en $-R$.
3. Étudier la convergence en R. On pourra introduire la suite $(\Delta(a_n^{-1}))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. 1. Puisque $\ln(1 + x) \leqslant x$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus, elle est minoré par 0, donc elle converge. Puisque f laisse stable le segment $[0, a_0]$, la limite de la suite est un point fixe de f sur ce segment, et est donc nulle. Donc $a_n \to 0$ et alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \sim \dfrac{a_n}{a_n} = 1$ donc par règle de d'Alembert, $R = 1$

2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, de limite nulle, donc par critère de Leibniz (série alternée), la série entière converge en -1.

3. On a $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n \ln(1 + a_n)}$, et donc puisque $a_n \to 0$, $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{a_n - a_n + \frac{a_n^2}{2}}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$. Alors $\dfrac{1}{a_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{a_0} \sim \frac{n}{2}$ (par divergence de $\sum \dfrac{1}{2}$, on peut comparer les sommes partielles). Autrement dit, $a_n \sim \dfrac{2}{n}$ et donc par divergence de la série harmonique, la série entière diverge en 1.

$\square$

Exercice 8.19 (Cauchy et Liouville).
Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, avec $a_n \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $0 < r < R$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta$ (formule de Cauchy).
2. On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante (théorème de Liouville).
3. On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme.

Solution. 1. Il s'agit de primitiver terme à terme une série entière ; on rappelle qu'on peut le faire par convergence normale sur $D(0, r)$ pour $r < R$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta$$

et l'intégrale vaut 2π si $k = n$ et 0 sinon.

2. Si $|f| < M$ sur $\mathbb{C}$, alors par inégalité triangulaire on a $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} M|e^{-in\theta}| d\theta = \dfrac{M}{r^n}$. Comme ceci est vrai pour tout $0 < r < +\infty$, alors si $n \geqslant 1$ on peut faire $r \to +\infty$ pour obtenir $a_n = 0$. Donc $f = a_0$ est constante.
3. Si P est de degré 0, c'est la question 2. Sinon, soit m le degré de P. On considère $g(z) = \displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} a_n z^{n-m}$, c'est-à-dire $g(z) = \dfrac{f(z) - a_0 - a_1 z - ... - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m}$. Alors $|g(z)| \leqslant \dfrac{|P(z)| + |a_0 + ... + a_{m-1} z^{m-1}|}{|z^m|}$ est borné, car le P est de degré m. Par la question 2, g est constante, d'où le résultat.

□

Exercice 8.20 (Principe des zéros isolés).
Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, avec $a_n \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que si $f \neq 0$, alors il existe $0 < r < R$ tel que pour tout $z \in D(0, r) \setminus \{0\}$ on ait $f(z) \neq 0$.
2. En déduire que si f et g sont les sommes de deux séries entières sur $D(0, R)$ qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur $D(0, R)$.

Solution. 1. Comme $f \neq 0$, il existe q tel que $a_q \neq 0$. Soit q le plus petit tel entier, de sorte que sur le disque de convergence, $f(z) = z^q \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+q} z^n = z^q g(z)$. On a $a_q = g(0)$, et g est continue en tant que somme d'une série entière. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(z_p)_p$ une suite de nombres complexes non-nuls tendant vers 0 tel que $f(z_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puisque $g(z_p) = 0$ et $z_p \to 0$, alors $a_q = g(0) = 0$, ce qui est absurde.

On peut aussi raisonner de façon directe. On reprend le q précédent. On écrit par hypothèse $f(z) = a_q z^q + o(z^q)$, c'est-à-dire $|f(z) - a_q z^q| = z^q \varepsilon(z)$ avec $\varepsilon(z) \to 0$. Il existe donc $r > 0$ tel que si $|z| < r$ alors $0 \leqslant \varepsilon(z) < \dfrac{|a_q|}{2}$. Donc pour $z \in D(0,r)$ on a $|f(z) - a_q z^q| < \dfrac{|a_q|}{2}|z|^q$, ce qui impose $f(z) \neq 0$.

2. Immédiat.

□

Exercice 8.21.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est absolument monotone si toutes ses dérivées sont positives sur $]a,b[$.

1. Donner des exemples de fonctions absolument monotones.
2. Montrer qu'une fonction absolument monotone est développable en série entière autour de chaque point de $]a,b[$.

Solution. 1. Pour tout $\lambda, \mu > 0$ la fonction $x \mapsto \lambda \exp(\mu x)$ est absolument monotone. La fonction tan aussi, car $\tan' = 1 + \tan^2$.

2. Soit $x_0 \in]a,b[$. Pour simplifier les notations, on opère une translation pour supposer $x_0 = 0$. On va montrer que f est somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Notons $R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ le reste du développement de Taylor. Ce reste est donné par la formule intégrale $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$. Soit $x \in]-c, c[\subset]a,b[$. Par croissance de $f^{(n+1)}$ (car $f^{(n+2)}$ est positive !), on a $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(cu)$. Donc par croissance de l'intégrale : $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{c^{n+1}} R_n(c)$. Pour majorer $R_n(x)$, on observe que $R_n(c) \geqslant 0$ donc que les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} c^k$ sont majorées par $f(c)$. Il en va de même des restes $R_n(c)$. Donc $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{c^{n+1}} f(c) \to 0$. Donc f est somme de sa série de Taylor sur $]-c, c[$, donc f est DSE en 0.

□

Exercice 8.22 (Exercice donnée en "colle Centrale").
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $n \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$. On note f la somme de la série entière $\sum x^{p_n}$.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série ?
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to R^-} (1-x)f(x) = 0$.
3. Prenons $p_n = n^2$. Déterminer un équivalent de f en R^-.

Solution. 1. Si $x<1$ alors $x^{p_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le rayon de convergence est au moins 1. Si $x>1$ alors $x^{p_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc le rayon de convergence est au plus 1. Finalement, $R=1$.

2. Soit $\varepsilon>0$, et soit A un entier tel que $A>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Comme $n \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$, il existe $n_0>0$ tel que si $n\geqslant n_0$, alors $\dfrac{n}{p_n}<\dfrac{1}{A}$ c'est-à-dire $\dfrac{p_n}{n}>A$. On a pour $x\in[0,1[$:

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^{p_n}\\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(x^{p_n/n}\right)^n\\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(x^{A}\right)^n\\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\frac{1}{1-x^A}\\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \frac{1}{1+x+\dots+x^{A-1}}.
\end{aligned}$$

Or, quand $x\to1$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n}\to n_0$ donc $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n}\to 0$. Ainsi, il existe $\delta>0$ tel que si $x\in]1-\delta,1[$ alors $0\leqslant(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n}\leqslant\varepsilon$.

Par ailleurs, toujours quand $x\to1$, on a $\dfrac{1}{1+x+\dots+x^{A-1}}\to\dfrac{1}{A}<\varepsilon$ donc il existe $\eta>0$ tel que si $x\in]1-\eta,1[$ alors $0\leqslant\dfrac{1}{1+x+\dots+x^{A-1}}<\varepsilon$.

Ainsi, pour $\alpha=\min(\delta,\eta)$ et $x\in]1-\alpha,1[$ on a $0\leqslant(1-x)f(x)<2\varepsilon$, d'où le résultat.

3. Une méthode utile pour obtenir un équivalent est une comparaison série intégrale (à condition de pouvoir calculer l'intégrale qui apparaît !). On va mettre un œuvre cela.
Soit $x\in]0,1[$ et $g:t\mapsto x^{t^2}$ pour $t\geqslant0$. Comme $x^{t^2}=e^{t^2\ln(x)}$ et puisque $\ln(x)<0$, alors g est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)dt\leqslant g(n)\leqslant\int_{n-1}^{n} g(t)dt$, donc en sommant et en ajoutant le terme pour $n=0$:

$$1+\int_1^{+\infty} g(t)dt\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}\leqslant 1+\int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

Pour calculer l'intégrale, on pose $u=t\sqrt{-\ln(x)}$, de sorte que

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{-\ln(x)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}}.$$

Comme on a l'équivalent $\ln(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} x-1$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ (tout se passe bien pour l'équivalent quand on inverse et prend la racine carrée). Ainsi, le membre de droite est équivalent à $\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ quand $x \to 1^-$ (la constante 1 ne joue aucun rôle). Le membre de gauche se traite de la même manière (la constante 1 ne joue aucun rôle, et le bout d'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g$ qui dépend de x n'est pas gênant, car il est borné par 1). Finalement, par encadrement on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

On peut au passage vérifier qu'on a bien $(1-x)f(x) \to 0$ quand $x \to 1^-$.

$\square$

9 Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Exercice 9.1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0, et telle que $f(0) = 0$. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On note $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n\ell} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors
$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leqslant \varepsilon \frac{k}{n^2}.$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

Solution. Il faut formaliser l'idée suivante : quand n est grand, $\displaystyle\frac{k}{n^2}$ est petit donc $\displaystyle f\left(\frac{k}{n^2}\right) \approx f'(0)\frac{k}{n^2}$, donc $\displaystyle S_n \approx \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=0}^{n\ell} k \approx \frac{f'(0)\ell^2}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| < \delta$ alors $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon x$. On voudrait appliquer ceci avec $x = \displaystyle\frac{k}{n^2}$. On a $\displaystyle 0 \leqslant \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{n\ell}{n^2} \leqslant \frac{\ell}{n}$, donc $\displaystyle 0 \leqslant \frac{k}{n^2} < \delta$ dès que $n \geqslant N$, où N est tel que $\displaystyle\frac{\ell}{N} < \delta$. Avec de tels N et n on a donc $\displaystyle\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leqslant \varepsilon \frac{k}{n^2}$.

Ainsi, par inégalité triangulaire on a

$$\left| S_n - \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=0}^{n\ell} k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n\ell} \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n\ell} \frac{k}{n^2}$$

c'est-à-dire

$$\left|S_n - \frac{f'(0)}{n^2}\frac{n\ell(n\ell+1)}{2}\right| \leqslant \varepsilon\frac{n\ell(n\ell+1)}{2n^2}$$

soit

$$\left|S_n - \frac{f'(0)\ell^2}{2} - \frac{f'(0)\ell}{2n}\right| \leqslant \varepsilon\left(\frac{\ell^2}{2}+\frac{\ell}{2n}\right) \leqslant \varepsilon\ell^2$$

où on a utilisé $\ell \in \mathbb{N}^*$ donc $\ell \leqslant \ell^2$. Donc par inégalité triangulaire on a

$$\left|S_n - \frac{f'(0)\ell^2}{2}\right| \leqslant \left|S_n - \frac{f'(0)\ell^2}{2} - \frac{f'(0)\ell}{2n}\right| + \left|\frac{f'(0)\ell}{2n}\right| \leqslant \varepsilon\ell^2 + \left|\frac{f'(0)\ell}{2n}\right|.$$

Alors avec n assez grand, on a $\left|S_n - \dfrac{f'(0)\ell^2}{2}\right| \leqslant 2\varepsilon\ell^2$, d'où le résultat. □

Exercice 9.2.
Soit E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue. On suppose que

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| = \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ un vecteur unitaire tel que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\|e$. Proposer une interprétation de ce résultat.

Solution. Si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b \|f\| = 0$ donc $f = 0$ par continuité, et le résultat est évident. On suppose donc $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$, et on pose $e_1 = \dfrac{\int_a^b f}{\left\|\int_a^b f\right\|}$; c'est un vecteur unitaire de E. Comme E est euclidien, on peut construire à partir de e_1 une BON $(e_1, ..., e_n)$. On note $f = (f_1, ..., f_n)$ les fonctions coordonnées de f dans cette base. Par définition de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)dt\right) e_i$, mais aussi par définition de e_1 et hypothèse on a aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b \|f(t)\|dt\right) e_1$. On en déduit que $\displaystyle\int_a^b f_i(t)dt = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ et que

$$\int_a^b f_1(t)dt = \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

Or, les inégalités $f_1(t) \leqslant |f_1(t)| \leqslant \|f(t)\|$ donnent $\displaystyle\int_a^b f_1(t)dt \leqslant \int_a^b |f_1(t)|dt \leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt$, donc l'égalité ci-dessus implique $\displaystyle\int_a^b |f_1(t)|dt = \int_a^b \|f(t)\|dt$, soit $\|f(t)\| = |f_1(t)|$ par continuité, puis $f_1(t) = |f_1(t)| = \|f(t)\| \geqslant 0$. Ceci implique $f_2 = ... = f_n = 0$, donc $f(t) = f_1(t)e_1 = \|f(t)\|e_1$ pour tout $t \in [a,b]$.

Ainsi, en cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire intégrale, l'image de f est continue dans une droite (dirigée ici par e_1), et orientée positivement selon e_1. En ramenant e_1 sur le premier vecteur de la base canonique, on est en train de dire que f est à valeurs réelles positives (ou en tous cas de signe constant, car l'image de f est incluse dans une demi-droite), ce qui correspond au cas d'égalité pour les fonctions réelles de la variable réelle. $\square$

Exercice 9.3.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $A \in \mathbb{R}$ tel que $|f''| \leqslant A$. Montrer que

$$\left| f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right| \leqslant \frac{A}{4}.$$

Solution. Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par inégalité de Taylor-Lagrange, on a pour a et x dans ces intervalles :

$$|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \leqslant \frac{|x-a|^2}{2}\|f''\|_\infty \leqslant \frac{(1/2)^2}{2}A = \frac{A}{8}.$$

On prend $a = \frac{1}{2}$, et $x = 0$ (pour le premier intervalle) et $x = 1$ (pour le deuxième). On obtient :

$$-\frac{A}{8} \leqslant f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f'(a) \leqslant \frac{A}{8} \qquad \text{et} \qquad -\frac{A}{8} \leqslant f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'(a) \leqslant \frac{A}{8}$$

et en sommant on a donc

$$-\frac{A}{4} \leqslant f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \frac{A}{4}$$

ce qui est le résultat souhaité.

$\square$

Exercice 9.4.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0. On considère $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt.$$

Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Solution. Comme f est dérivable en 0, on peut écrire pour $t \in [0,1]$: $f(t) = f(0) + tf'(0) + o(t)$ (formule de Taylor-Young). On a donc $tf(t) = tf(0) + t^2 f'(0) + o(t^2)$, puis $\int_0^x tf(t)dt = \frac{x^2}{2}f(0) + \frac{x^3}{3}f'(0) + o(x^3)$, donc $g(x) = \frac{f(0)}{2} + x\frac{f'(0)}{3} + o(x)$. Posons $g(0) = \frac{f(0)}{2}$; on prolonge ainsi g par continuité en 0, et on note toujours (par abus) g ce prolongement. Alors le prolongement g

admet un développement limité d'ordre 1 en 0, ce qui montre que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{3}$.

Par ailleurs, comme $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0,1]$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ l'est aussi, alors g l'est par produit de telles fonctions. On peut calculer

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2}{x^3}\int_0^x tf(t)dt + \frac{1}{x^2}xf(x) = -\frac{2g(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \\ &= -\frac{f(0)}{x} - \frac{2f'(0)}{3} + o(1) + \frac{f(0)}{x} + f'(0) + o(1) \\ &= \frac{f'(0)}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{f'(0)}{3}$, donc g' est continue en 0, c'est-à-dire le prolongement est $\mathcal{C}^1$. □

10 Intégration

10.1 Sur un segment

Exercice 10.1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{1/n}$.

Solution. On conjecture que ça converge vers $\|f\|_{\infty,[a,b]}$, et c'est le cas. On note $M = \|f\|_\infty$. On écrit d'abord par croissance de l'intégrale :

$$\varphi(n) \leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

D'autre part, f est continue donc elle atteint ses bornes sur le compact $[a,b]$ (Weierstrass). Soit c tel que $f(c) = M$, soit $\varepsilon > 0$ et soit $[\alpha, \beta]$ un segment contenant c, avec $\alpha \neq \beta$ et tel que pour $t \in [\alpha,\beta]$, $f(t) \geqslant M - \varepsilon$. Par positivité de f :

$$\varphi(n) \geqslant \left(\int_\alpha^\beta f(t)^n dt\right)^{1/n} \geqslant (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{1/n}.$$

Puisque $(\beta-\alpha)^{1/n}$ et $(b-a)^{1/n}$ tendent vers 1 quand $n \to +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$:

$$(\beta-\alpha)^{1/n} \geqslant 1-\varepsilon \ \text{ et } \ (b-a)^{1/n} \leqslant 1+\varepsilon.$$

On a alors l'encadrement :

$$\begin{aligned} (M-\varepsilon)(1-\varepsilon) \leqslant{}& \varphi(n) &\leqslant M(1+\varepsilon) \\ M - \varepsilon(M+1) + \varepsilon^2 \leqslant{}& \varphi(n) &\leqslant M + \varepsilon M \\ M - \varepsilon(M+1) \leqslant{}& \varphi(n) &\leqslant M + \varepsilon(M+1). \end{aligned}$$

En remplaçant ε par $\varepsilon(M+1)$, on obtient donc $|\varphi(n)-M| \leqslant \varepsilon$, pour $n \geqslant n_0$. Résumons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |\varphi(n)-M| \leqslant \varepsilon.$$

□

10.2 Sur un intervalle quelconque

Exercice 10.2.
Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. L'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable. En $+\infty$, il est en $O(e^{-t/2})$, donc intégrable aussi. Donc I_n existe.

On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{(i-1)t} dt$. Par intégration par parties, on a $J_{n+1} = (n+1)\frac{1+i}{2} J_n$. Comme $J_0 = \frac{1+i}{2}$, alors $J_n = n! \frac{e^{(n+1)i\pi/4}}{\sqrt{2}^{n+1}}$. On troue I_n en prenant la partie imaginaire. □

Exercice 10.3.
Soit $p, q > 0$. Montrer que $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ est bien définie, puis calculer $B(p,q)$ si p et q sont dans $\mathbb{N}^*$.

Solution. L'intégrande est continue donc localement intégrable. Comme il est positif, on raisonne par équivalent pour déterminer l'intégrabilité en 0 et 1. En 0, il est équivalent à x^{p-1} qui est intégrable (comparaison intégrale de Riemann) car $p > 0$ donc $p-1 > -1$. Idem, en 1 il est équivalent à $(1-x)^{?q-1}$ et c'est intégrable.

Si p, q sont entiers, on a par intégration par parties $B(p,q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q+1)$. En itérant, on arrive à $B(p,q) = \frac{(p-1)!}{q(q+1)\dots(q+p-2)} B(1, p+q-1)$. Comme $B(1, p+q-1) = \frac{1}{p+q-1}$ on a $B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. □

Exercice 10.4.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$.
2. Soit $a, b > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

Solution. 1. On peut poser $y = \arctan(x)$.
Autrement : $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+x^2})^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. On intègre le premier bout avec arctan, on trouve qu'il vaut $\frac{\pi}{2}$.

Pour le deuxième bout, on écrit $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{+\infty} x(x(1+x^2)^{-2})dx$, et on reconnaît entre parenthèse la dérivée de $\frac{-1}{2}\frac{1}{1+x^2}$. Donc en intégrant par parties, on a $\int_0^{+\infty} x(x(1+x^2)^{-2})dx = \left[\frac{-x}{2(1+x^2)}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+x^2})^2 dx = \frac{\pi}{4}$.

2. D'après la première question, si $a = b$ on calcule $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{a^2+x^2})^2 dx = \frac{1}{a^4}\int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+y^2})^2 a dy = \frac{\pi}{4a^3}$ (où $x = ay$). Par parité de l'intégrande, l'intégrale cherchée vaut $\frac{\pi}{2a^3}$.
   Sinon, $a \neq b$ et on écrit $\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2} = \frac{b^2-a^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, donc l'intégrale vaut $\frac{1}{b^2-a^2}\pi(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$ (on intègre avec $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$).

□

Exercice 10.5.
Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}dx$.

Solution. L'intégrale converge en $\pm\infty$ car l'intégrande est en $\frac{1}{x^4}$. Par parité de l'intégrande, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}dx = 2I$. On fait le changement de variables $y = \frac{1}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$. On tombe sur $I = -I$, donc l'intégrale cherchée est nulle. □

Exercice 10.6.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $(f')^2$ est aussi intégrable. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

1. Par uniforme continuité, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Comme f est intégrable, il existe $A > 0$ tel que pour $x, y > A$, on a $|\int_x^y f| < \varepsilon\eta$. Alors si $x > A$, on a $\eta|f(x)| = |\int_x^{x+\eta} f(x)dt| \leqslant \int_x^{x+\eta}(f(x) - f(t))dt| + |\int_x^{x+\eta} f(t)dt| \leqslant \int_x^{x+\eta} \varepsilon dt + \varepsilon\eta = 2\varepsilon\eta$, d'où le résultat.
   Remarque : ce résultat est faux si on suppose seulement f continue.
2. Montrons que f est uniformément continue. Par inégalité de Schwarz on a pour $x < y$: $|f(x) - f(y)| = |\int_x^y f'(t)dt| \leqslant (\int_x^y f'(t)^2 dt)^{1/2}\sqrt{y-x}$. Donc f est uniformément continue. Comme son intégrale converge, la question 1 montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En particulier, f est bornée.

□

Exercice 10.7.

1. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable. Étudier $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$.

Solution. 1. Soit $x \in]0,1]$. Comme f est intégrable sur $]0,x]$ et décroissante, on a $\int_0^x f(t)dt \geqslant xf(x) \geqslant 0$. Comme le membre de gauche tend vers 0 avec x, celui de droite aussi.

2. Comme f décroît et est positive, elle tend en $+\infty$ vers une limite ℓ. Par intégrabilité de f, on a forcément $\ell = 0$. Pour $x > 0$, on a $\int_{x/2}^x f(t)dt \geqslant \frac{x}{2}f(x) \geqslant 0$. Comme $\int_{x/2}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x/2} f(t)dt$ et que ces deux intégrales ont la même limite quand $x \to +\infty$ (car f est intégrable), alors $\int_{x/2}^x f(t)dt$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0$.

□

Exercice 10.8.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.
2. Réciproquement, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux, décroissante et $f(x) = o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$, est-ce que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Solution. 1. Voir la question 2 de l'exercice précédent.

2. Non, prendre $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$. Cette fonction s'intègre en $F(x) = \ln(\ln(x))$, donc l'intégrale ne converge pas en $+\infty$.

□

Exercice 10.9 (Un Cesaro version intégrale).
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$ et a tel que pour $x > a$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. On sépare l'intégrale en a. Comme $\int_0^a f$ est finie, on peut trouver x_0 tel que si $x > x_0$, alors $\left|\frac{1}{x}\int_0^a f\right| < \varepsilon$. Pour l'autre morceau, on a $\frac{(x-a)(\ell-\varepsilon)}{x} \leqslant \frac{1}{x}\int_a^x f \leqslant \frac{(x-a)(\ell+\varepsilon)}{x} \leqslant \ell + \varepsilon$. Il existe x_1 tel que pour $x > x_1$, on a $\frac{(x-a)(\ell-\varepsilon)}{x} = \ell - \varepsilon - \frac{a(l-\varepsilon)}{x} \geqslant \ell - 2\varepsilon$.

Pour $x > \max(x_0, x_1)$, on recolle les morceaux et c'est ok. □

10.3 Théorèmes de Lebesgue

Exercice 10.10.
Pour $n > 0$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ quand $n \to +\infty$.

Solution. 1. En 0, $f_n \sim \frac{1}{n}$ donc est intégrable. En $+\infty$, $f_n = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc est intégrable.

2. On regarde nI_n. On applique la CV dominée avec $x \mapsto \dfrac{x\ln(1+\frac{x}{n})}{x(x+x^2)}$, qui converge simplement vers $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On peut tout dominer par $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Bref, la CV dominée permet de calculer $nI_n = \frac{\pi}{2}$ donc $I_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

□

Exercice 10.11.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx$

1. Après avoir justifié la convergence de l'intégrale, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Solution. 1. Par CV dominée, on trouve que la limite vaut 0.

2. On pose $u = nx$, puis on fait une CV dominée. On trouve $f(0)$.

□

Exercice 10.12.
Calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{e^x - 1}dx$ (après avoir justifié que ça existe).

Solution. Pour calculer, on écrit $\dfrac{1}{e^x-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$. On pose $f_n(x) = xe^{-nx}$. Les f_n sont continues par morceaux et intégrables, et $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$, qui est aussi continue par morceaux. De plus, $\int |f_n| = \int f_n = \frac{1}{n^2}$ par IPP. Donc $\sum \int |f_n|$ converge, et par théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{e^x-1}dx = \int_0^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \dfrac{\pi^2}{6}$. □

Exercice 10.13.

1. Montrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}dt = -\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{1+t}dt$ (après avoir justifié que ça existe).
2. En déduire $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Solution. 1. Faire une IPP.

2. Écrire $\frac{\ln(1+t)}{t} = \ln(t)\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n-1}t^n$, noter $f_n(t) = (-1)^{n-1}\ln(t)t^n$. Alors f_n est continue par morceaux et la série $\sum f_n$ CVS vers $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ qui est aussi continue par morceaux. De plus, $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(n+1)^2}$ (par IPP), donc $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge. Par théorème d'intégration terme à terme, on a le résultat.

□

Exercice 10.14.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)dx$.

Solution. On pose la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)$ sur $[0,n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon. On doit calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$. On a :

- ▷ $\forall n\in\mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0_{mcx}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$;
- ▷ f_n CVS vers f définie par $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ et $f\in\mathcal{C}^0_{mcx}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$;
- ▷ la fonction $\varphi : x\mapsto e^{-x}$ vérifie :
  - ▷ $\varphi \geqslant 0$;
  - ▷ $\varphi\in\mathcal{C}^0_{mcx}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$;
  - ▷ $\forall n\in\mathbb{N}, |f_n|\leqslant\varphi$.

Ce dernier point se montre par convexité de l'exponentielle : $1+u\leqslant e^u$ appliquée à $u = -\frac{x}{n}$ puis élevée à la puissance n donne $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. Alors par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f.$$

Cette intégrale peut alors se calculer en passant en complexes :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(e^{-x}e^{ix})dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-1)x}dx\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Exercice 10.15.
Soit $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)^n dt = 0$.

Solution. Comme $0 < f(x) < 1$ pour $0 < x < 1$, alors la suite $(f^n)_n$ CVS vers l'indicatrice de $\{1\}$. On a : les f^n et f sont continues par morceaux et intégrables, f est continue par morceaux, les f^n sont dominées par la constante 1 qui est intégrable. Par CV dominée, on a le résultat. □

Exercice 10.16.
Soit I un intervalle réel et $f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et intégrables, qui convergent simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

1. On suppose que $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_I |f_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I |f|$.

Solution.

1. Par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\int_I f_n - \int_I f\right| \leqslant \int_i |f_n - f|$, donc la condition nécessaire est facile.
   Montrons la condition suffisante. Puisque tous les f_n sont positives, alors f aussi. Considérons $g_n = |f_n - f| + f - f_n = 2\max(0, f - f_n)$, c'est une fonction continue par morceaux. Par hypothèse, g_n converge simplement sur I vers 0. De plus, $0 \leqslant g_n \leqslant 2f$ car $f - f_n \leqslant f$ car $f_n \geqslant 0$. Ceci constitue une domination intégrable de g_n, ce qui montre que les g_n sont intégrables et permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. On a donc $\displaystyle\int_I g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat.
   On a introduit g_n pour pouvoir avoir une domination indépendante de n et appliquer la convergence dominée.
2. Pour la condition nécessaire, on a $\left|\displaystyle\int_I |f_n| - \int_I |f|\right| \leqslant \int_I ||f_n| - |f|| \leqslant \int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Réciproquement, la question 1 permet d'affirmer que $\displaystyle\int_I ||f_n| - |f|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons (un peu comme précédemment) $g_n = |f_n - f| - ||f_n| - |f||$. C'est une fonction continue par morceaux, et g_n converge simplement vers 0 sur I. Pour a, b réels, on a $|a - b| \leqslant |a| + |b|$ et $||a| - |b|| \geqslant |a| - |b|$, donc $0 \leqslant |a - b| - ||a| - |b|| \leqslant |a| + |b| - (|a| - |b|) = 2|b|$. Donc $0 \leqslant g_n \leqslant 2|f|$. Comme précédemment, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\int_I g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui permet de conclure.

□

Exercice 10.17.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. On considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et calculer $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Puisque $f(0) = 0$, alors $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$. En posant $t = ux$, on obtient $f(x) = x\displaystyle\int_0^1 f'(ux)du$. Pour $x \neq 0$ on a donc $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(ux)du$, et cette formule est toujours valable pour $x = 0$. Posons $h(x, u) = f'(ux)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

▷ pour tout $u \in [0,1]$, $h(\cdot, u)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, car f est $\mathcal{C}^\infty$,

▷ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, les fonctions $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \cdot)$ sont continues par morceaux et intégrables sur le segment $[0,1]$,

▷ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ la fonction $\varphi_K : u \mapsto \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \sup\limits_{x \in K} \left(\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,u) \right)$ est continue par morceaux, intégrable sur $[0,1]$ et domine tous les $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(\cdot, \cdot)$.

Par dérivation sous l'intégrale, g est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème donne de plus $g^{(n)}(0) = \displaystyle\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(0) du = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. □

Exercice 10.18.
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt$.

Solution. On note $f(x,t) = \dfrac{\sin(tx)}{t} e^{-t}$. Alors :

▷ pour tout $t > 0$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

▷ pour $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(x, \cdot)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \cos(tx)e^{-t}$ sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, +\infty[$,

▷ sur le compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \max(|a|, |b|, 1)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et domine f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

On peut donc dériver sous l'intégrale : I est de classe $\mathcal{C}^1$ et $I'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t} dt$. En se souvenant que $\cos(tx) = \mathrm{Re}(e^{itx})$, on a $I'(x) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$.
Puisque $I(0) = 0$, on en déduit $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x)$. □

Exercice 10.19 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne).
On considère $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. Calculer $I(x)$, en cherchant une relation entre I et I'.

Solution. On pose $f(x,t) = e^{-t^2} \cos(2xt)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $f(x, \cdot)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ sont continues par morceaux et intégrables ; elles sont dominées par $t \mapsto \max(1, 2t)e^{-t^2}$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ (et ceci est une domination indépendante de x !). En dérivant sous l'intégrale, on peut donc affirmer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $I'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \sin(2xt) dt$. En posant $g(t) = \sin(2xt)$, $g'(t) = 2x\cos(2xt)$, $h'(t) = -2te^{-t^2}$ et $h(t) = e^{-t^2}$, on a par IPP (sur $[0,a]$, puis en faisant tendre a vers $+\infty$) : $I'(x) = -2xI(x)$. Ceci s'intègre en $I(x) = I(0)e^{-x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$. □

Exercice 10.20.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \left(\int_0^1 f(t)^x dt\right)^{1/x}$.

Solution. Notons $g(x,t) = f(t)^x$ pour $t \in [0,1]$ et $x \in [0,+\infty[$, c'est une fonction continue. Elle est dérivable par rapport à x, et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(f(t))f(t)^x$. Les fonctions $g(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\cdot)$ sont intégrables (car continues) sur le segment $[0,1]$. De plus, par continuité de g et de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, ces deux fonctions sont bornées sur le compact $[a,b] \times [0,1] \subset \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. Elles sont donc dominées par une constante M (indépendante de x), qui est intégrable sur $[0,1]$. On peut donc dériver sous l'intégrale : $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)^x dt$ est dérivable et $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(f(t))f(t)^x dt$. En particulier, $F'(0) = \displaystyle\int_0^1 \ln(f(t))dt$.

Ainsi, $F(x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(F(x))}{x}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(F(0) + xF'(0) + o(x))}{x}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(1 + xF'(0) + o(x))}{x}\right)$.
Comme $\ln(1+u) = u + o(u)$ on a $F(x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{xF'(0) + o(x)}{x}\right) = \exp(F'(0) + 0(1))$. Dans la limite $x \to 0$, on trouve $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \left(\int_0^1 f(t)^x dt\right)^{1/x} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))dt\right)$. □

Exercice 10.21.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Solution. On commence par justifier que les quantités existent : l'intégrande est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 qui est intégrable (Riemann avec $1/2 < 1$), et à $\sqrt{t}e^{-t}$ en $+\infty$ qui est intégrable (croissance comparées) ; la série converge (Riemann avec $3/2 > 1$). L'idée est ensuite d'écrire l'intégrande comme somme d'une série, et d'intégrer terme à terme.

Pour cela, on écrit $\dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t} \times \dfrac{1}{1 - e^{-t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$, ceci étant valable pour $t \in]0,+\infty[$. Notons $f_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}$, c'est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ CVS vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$, qui est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Enfin, en faisant le changement de variable $u = \sqrt{nt}$, on $du = \dfrac{ndt}{2\sqrt{nt}}$ donc $dt = \dfrac{2udu}{n}$. On calcule alors

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{n}} e^{-u^2} \frac{2udu}{n} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} du.$$

On calcule cette intégrale par IPP sur le segment $[0,a]$. On pose $g(u)=u$, $g'(u)=1$, $h'(u)=2ue^{-u^2}$, $h(u)=-e^{-u^2}$. L'IPP donne $\displaystyle\int_0^a 2u^2e^{-u^2}du = [g(x)h(x)]_0^a + \int_0^a e^{-u^2}du$ et en prenant la limite $a\to+\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} 2u^2e^{-u^2}du = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}.$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge. Alors par intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. □

11 Probabilités

11.1 Probabilités finies et dénombrement

Exercice 11.1.

1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$ tel que $A\subset B$?
2. Dans une urne contenant n boules, on pioche une poignée de boules. Puis, on remet les boules dans l'urne, on mélange et on effectue une nouvelle pioche de boules. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun entre les deux pioches ?

Solution.

1. Pour choisir un tel couple (A,B), on choisit d'abord A. On choisit son cardinal k, puis on tire au hasard ses éléments : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Puis, choisir B contenant A revient à choisir une partie de $E\setminus A$: il y a 2^{n-k} possibilités. Finalement, le nombre de tels couples est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}=3^n$.
2. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le résultat de la première (resp. deuxième) pioche, ces variables sont à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ (avec E l'ensemble des boules). Grâce au mélange, on peut supposer X et Y indépendantes, et suivant toutes deux une loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$. On en déduit que le couple (X,Y) suit une loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)^2$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X\cap Y=\emptyset)=\mathbb{P}(X\subset Y^c)=\frac{\text{nombre de couples }(A,B)\text{ tels que }A\subset B}{|\mathcal{P}(E)^2|}=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

□

Exercice 11.2.

Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n (ensemble des permutations de n éléments). Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérance de X.

Solution. Le nombre de points fixes est donné par $X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\sigma(k)=k}$. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\sigma(k)=k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\sigma(k) = k)$. Comme σ est uniformément distribuée, et qu'il y a $(n-1)!$ permutations qui fixent k, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. □

Exercice 11.3 (Indicatrice d'Euler).
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = [\![1, n]\!]$. Soit $n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers.

1. Soit d un diviseur de n. On note A_d l'ensemble des multiples de d dans E. Les évènements $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
2. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments premiers avec n dans E. Montrer que $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Solution.

1. On calcule d'abord $\mathbb{P}(A_d)$. Comme $A_d = \{kd,\ 1 \leqslant k \leqslant q\}$ où $q = \frac{n}{d}$, alors avec la probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A_d) = \frac{q}{n} = \frac{1}{d}$.
Soit I une partie de $[\![1, r]\!]$, et $m = \prod_{i \in I} p_i$. On a $\bigcap i \in I A_{p_i} = A_m$. Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{m} = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_{p_i})$$
donc les $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
2. On veut calculer la probabilité de tirer un entier au hasard dans E qui soit premier avec n. Or, un entier est premier avec n si et seulement s'il est premier avec chacun des $p_1, ..., p_r$, si et seulement s'il n'appartient à aucun des A_{p_k}. On recherche ainsi $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{p_k}^c\right)$. Comme les A_{p_k} sont mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi, donc
$$\frac{\varphi(n)}{n} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{p_k}^c\right) = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{p_k}^c) = \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

□

Exercice 11.4 (Dé truqué).
Soit un dé à 6 faces truqué, de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle à la valeur de la face.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir chaque face ?
2. On effectue plusieurs lancers de ce dé, et on somme les résultats. On note p_n la probabilité que la somme après n lancers soit paire. Calculer p_n.

Solution. 1. Pour $1 \leqslant k \leqslant 6$ on note $P_k = \mathbb{P}(\{k\})$. Par hypothèse, il existe λ tel que $P_k = \lambda k$, et on a $\lambda = P_1$. Comme $P_1 + ... + P_6 = 1$ on obtient $21P_1 = 1$, donc $P_1 = \dfrac{1}{21}$ et $P_k = \dfrac{k}{21}$.

2. Calculons d'abord la probabilité qu'un lancer soit pair : elle vaut $p_1 = P_2 + P_4 + P_6 = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$. On cherche maintenant une relation de récurrence pour la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$. Notons A_n l'évènement "la somme après la n-ème lancer est paire". Comme (A_n, A_n^c) est un système complet d'évènements, les probabilités totales donnent $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c)$. Or, $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{4}{7}$ car si la n-ème somme est paire, la $(n+1)$-ème somme est paire si et seulement si le $(n+1)$-ème lancer est pair. De même, $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n^c) = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$. Ainsi, on obtient la relation de récurrence $p_{n+1} = \dfrac{4}{7}p_n + \dfrac{3}{7}(1 - p_n) = \dfrac{1}{7}p_n + \dfrac{3}{7}$: c'est une suite arithmético-géométrique. Le point fixe de $x \mapsto \dfrac{1}{7}x + \dfrac{3}{7}$ est $x = \dfrac{1}{2}$. La suite $(p_n - x)_{n\geqslant 1}$ est alors géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$, de sorte que $p_n - x = \dfrac{1}{7^{n-1}}(p_1 - x)$. Avec $p_1 = \dfrac{4}{7}$ et $x = \dfrac{1}{2}$ on trouve $p_n = \dfrac{1}{14 \times 7^{n-1}} + \dfrac{1}{2}$.

□

Exercice 11.5.
Soit E l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où, $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. On tire au hasard un matrice de E, de façon uniforme. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit diagonalisable ?

Solution. On peut lister toutes les matrices et compter lesquelles sont diagonalisables. On trouve $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$.

Si on ne veut pas tout lister, on peut écrire $E = D \sqcup U \sqcup L \sqcup N$ avec D (resp. U, L, N) les matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures non-diagonales, triangulaires inférieures non-diagonales, non-triangulaires). Chacun des ses ensembles contient éléments (par exemple, U est défini par $(b, c) = (1, 0)$). Les éléments de D sont diagonalisables. Ceux de U le sont si leurs éléments diagonaux sont différents, donc 2 le sont ; idem pour L. Enfin, ceux de N sont tous diagonalisables (remarquer que le polynôme caractéristique est toujours simplement scindé). Donc la probabilité est $\dfrac{4 + 2 + 2 + 4}{16} = \dfrac{3}{4}$. □

Exercice 11.6 (Chaîne de Markov).
Une particule peut se trouver dans trois états différents : A, B ou C. Chaque seconde, elle change d'état avec la règle suivante :

- ▷ si elle est en A, elle y reste deux fois sur cinq, et passe en B sinon,
- ▷ si elle est en B, elle y reste la moitié du temps, passe en A dans 20% des cas, et va en C sinon,
- ▷ si elle est en C, elle y reste avec probabilité $3/5$, et va en B sinon.

On commence l'observation de la particule à $t = 0$. On note a_n (resp. b_n et c_n) la probabilité que la particule se trouve dans l'état A (resp. B et C) à $t = n$. On note $X_n = (a_n, b_n, c_n)$ (vecteur ligne).

1. Trouver une relation de récurrence pour la suite $(X_n)_n$.
2. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0.
3. Dans quel état la particule a-t-elle le plus de chances de se trouver après un temps très long ?

Solution. 1. On a $X_{n+1} = X_n M$ avec $M = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 1/5 & 1/2 & 3/10 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

2. On en déduit $X_n = X_0 M^n$. Il s'agit donc de calculer M^n. Pour cela, on diagonalise M. On calcule $\chi_M = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Ainsi, M est diagonalisable, et on cherche P inversible telle que $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Pour cela, on calcule des vecteurs propres. Pour $\lambda = 1$ on obtient $(1, 1, 1)$. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient $(6, 1, -4)$. Pour $\lambda = 0$ on obtient $(9, -6, 4)$. On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(P) = -125$ puis $P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a $M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 + \frac{12}{2^n} & 12 + \frac{6}{2^n} & 9 - \frac{18}{2^n} \\ 4 + \frac{2}{2^n} & 12 + \frac{1}{2^n} & 9 - \frac{3}{2^n} \\ 4 - \frac{8}{2^n} & 12 - \frac{4}{2^n} & 9 + \frac{12}{2^n} \end{pmatrix}$ et $X_n = ...$ On peut vérifier que la somme de chaque ligne de M^n vaut 1, et que $a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

3. On a $\lim_n X_n = \frac{1}{25}(4, 12, 9)$, donc elle a plus de chance d'être en B.

□

11.2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 11.7 (Loi sans mémoire).

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X > k + n \mid X > k) = \mathbb{P}(X > n)$.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété précédente, et telle que $\mathbb{P}(X = k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X suit une loi géométrique, dont on précisera le paramètre.

Solution. 1. On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$. On calcule également $\mathbb{P}(X > k+n \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k+n,\ X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{\mathbb{P}(X > k+n)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^k} = (1-p)^n$.

2. Soit $p = \mathbb{P}(X = 1)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{\mathbb{P}(X > k+1)}{\mathbb{P}(X > k)} = \mathbb{P}(X > k+1 \mid X > k) = \mathbb{P}(X > 1) = 1-p$. On obtient donc $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^{k-1}\mathbb{P}(X > 1) = (1-p)^k$. Finalement, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^{k-1}(1-(1-p)) = p(1-p)^k$.

□

Exercice 11.8.

Soit $a \in]0,1[$ et $b \in]0,+\infty[$. Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs entières : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On donne la loi conjointe de X et Y : pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{b^i a^j e^{-b}(1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelles sont les lois de X et Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On pose $Z = X - Y$. Quelle est la loi de Z ? Les variables Z et Y sont-elles indépendantes ?

Solution. 1. On détermine la loi de X en calculant $P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j)$, et idem pour Y. On trouve des lois de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(b)$ et $Y \sim \mathcal{P}(ab)$. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car si $i < j$ on a $P(X = i, Y = j) = 0 \neq P(X = i)P(Y = j)$.

2. On détermine la loi de Z comme pour X et Y en remarquant que $P(Z = n) = P(X = Y + n) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j+n, Y = j)$. On trouve encore une loi de Poisson : $Z \sim \mathcal{P}((1-a)b)$ (ne pas oublier de faire le cas $n = 0$). Cette fois-ci Z et Y sont indépendantes.

□

Exercice 11.9.

Soit X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson, de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Solution. On montre que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En effet, on a par indépendance $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k,\ Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k)$, et on fait les calculs tranquillement en reconnaissant un binôme de Newton. On peut raisonner avec la fonction génératrice en faisant exactement les mêmes calculs. □

Exercice 11.10.
Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, et $Z = X!$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Solution. Par la formule de transfert, Z admet une espérance si et seulement si $(n!\mathbb{P}(X = n))_n$ est sommable. Comme $n!\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n$, ceci n'est vérifié que pour $0 \leqslant \lambda < 1$. Dans ce cas, on a $\mathbb{E}(Z) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n = \dfrac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$ (dans les autres cas, l'espérance est infinie). □

Exercice 11.11.
Une marque de lessive offre une carte d'un jeu de 52 cartes à chaque achat d'un paquet de lessive. Soit S le nombre de paquets à acheter pour avoir un jeu complet. Estimer l'espérance de S.

Solution. Soit X_k la variable aléatoire qui donne le nombre de paquets à acheter pour obtenir une carte différentes des k cartes distinctes déjà obtenues. Alors $S = \sum_{k=0}^{51} S_k$. De plus, si on a k cartes distinctes, la probabilité d'une obtenir une encore différente est $\dfrac{52-k}{52}$. Ainsi, X_k suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{52-k}{52}$, son espérance est donc $\dfrac{52}{52-k}$. Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{51}\mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=0}^{51}\dfrac{52}{52-k} = 52\sum_{k=1}^{52}\dfrac{1}{k} \simeq 52\ln(52) \simeq 205$. Bref, on n'est pas prêt d'avoir un jeu complet... □

Exercice 11.12.
Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.

   (b) En déduire que si X admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k)$.

2. Montrer que si X admet une variance, alors $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X > k)$.

3. Au dernier DS de maths, le professeur a tiré au hasard les notes (entre 0 et N) des n élèves de sa classe. On note X la meilleure note obtenue. Calculer l'espérance de X et préciser sa loi.

Solution. 1. On écrit $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X > k)$, puis on sépare la somme en deux et on en ré-indexe une :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).\end{aligned}$$

Pour la question (b), on a $0 \leqslant nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ et cette dernière somme tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente (l'espérance).

2. On fait un pareil. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\mathbb{P}(X > k) - n^2\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathbb{P}(X > k) - n^2\mathbb{P}(X > n).\end{aligned}$$

Puis on écrit $0 \leqslant n^2P(X > n) = n^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^2P(X = k)$ et cette dernière somme tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente car X admet un moment d'ordre 2.

3. Pour calculer l'espérance, on utilise la première question. Pour cela, on calcule $\mathbb{P}(X > k)$. Si $k \geqslant N$, alors $\mathbb{P}(X > k) = 0$. Notons X_j la note obtenue par le j-ème élève, on a $X = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$. L'évènement $\{X > k\}$ est le complémentaire de $\{X \leqslant k\}$, qui est égal à $\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j \leqslant k\}$. Par indépendance des X_j, on a donc $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X_j \leqslant k) = 1 - \left(\frac{k+1}{N+1}\right)^n$, en supposant le choix uniforme. Ainsi, l'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) = N - \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N+1}\right)^n$. On détermine la loi de X par $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{(N+1)^n}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$ pour $0 < k \leqslant N$, ce qui donne $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(k+1)^n - k^n}{(N+1)^n}$.

□

Exercice 11.13.
On lance un dé 2700 fois, et on note X le nombre de fois qu'on a obtenu 5 ou 6. Montrer que la probabilité que X soit strictement compris entre 800 et 1000 est supérieure à 0.94.

Solution. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2700$ et $p = \dfrac{1}{3}$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = np = 900$ et sa variance est $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 600$. L'encadrement $800 < N < 1000$ est équivalent à $-100 < N - 900 < 100$ donc à $|X - \mathbb{E}(X)| < 100$. Or, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 100) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{100^2} = \dfrac{600}{100^2} = \dfrac{6}{100}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 100) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 100) \geqslant 1 - \frac{6}{100} = 0.94.$$

□

Exercice 11.14.
Soit X une variable aléatoire discrète centrée de variance σ^2 finie. Soit $a, b > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\left((X+b)^2 \geqslant (a+b)^2\right)$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
3. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution.
1. Puisque $X \geqslant a \Rightarrow X + b \geqslant a + b > 0 \Rightarrow (X+b)^2 \geqslant (a+b)^2$, alors ok.
2. Par inégalité de Markov, $\mathbb{P}\left((X+b)^2 \geqslant (a+b)^2\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left((X+b)^2\right)}{(a+b)^2} = \dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2b\mathbb{E}(X) + b^2}{(a+b)^2} = \dfrac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$ car $\mathbb{E}(X) = 0$. De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs (σ, a) et (b, σ) donne $(a+b)^2\sigma^2 \leqslant (a^2 + \sigma^2)(b^2 + \sigma^2)$, avec égalité si $ab = \sigma^2$ (condition de colinéarité). En prenant $b = \dfrac{\sigma^2}{a}$, on a donc $(a+b)^2\sigma^2 = (a^2 + \sigma^2)(b^2 + \sigma^2)$ ce qui donne le résultat.
3. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$. Donc l'inégalité obtenue est plus fine.

□

Exercice 11.15.
Soit $(X_k)_k$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes d'une autre variable aléatoire N, aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

1. Montrer que pour $t \in [-1, 1]$ on a $G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$.

2. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que les X_k suivent une loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de S.

Solution. 1. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a $\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n,\ S_n = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(S_n = k)$ par indépendance de N et S_n. Par sommation par paquets, pour $t \in [-1, 1]$ on a

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(S_n = k) \right) t^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) t^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(t). \end{aligned}$$

Comme les $(X_k)_k$ sont iid, on a $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t)^n$, et ok.

2. On sait que $G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et que $G_{X_1}(t) = pt + 1 - p$. Donc $G_S(t) = e^{\lambda(pt-p)}$ donc S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, car la fonction génératrice caractérise la loi.

□

Exercice 11.16.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note G sa série génératrice et $r_n = \mathbb{P}(X > n)$. Pour $|t| < 1$, on pose $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Exprimer H en fonction de G.

Solution. Comme $0 \leqslant r_n \leqslant 1$, alors $H(t)$ est bien défini pour $|t| < 1$. Avec $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, on a $p_n = r_{n-1} - r_n$. Ainsi, on calcule $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} r_{n-1} t^n$ avec $r_{-1} = 1$. On reconnait $-G(t)$ dans la première somme, et la deuxième est $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_{n-1} t^n = 1 + t \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n = 1 + tH(t)$. Donc $H(t) = \dfrac{1 - G(t)}{1 - t}$. □

Exercice 11.17 (Variable aléatoire quasi-certaine).
Une variable aléatoire réelle X est quasi-certaine s'il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable. Montrer que X est quasi-certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

Solution. Si X est quasi-certaine égale à a alors X^2 est quasi-certaine égale à a^2. Donc $\mathbb{V}(X)$ existe bien et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = a^2 - a^2 = 0$.

Réciproquement, notons $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (ou $0 \leqslant n \leqslant N$) et $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. On a $0 = \mathbb{V}(X) = \sum_n p_n(x_n - m)^2$ où $m = \mathbb{E}(X)$. Tous les termes de la somme sont donc nuls. Comme tous les p_n ne sont pas nuls, il existe au moins un n tel que $x_n = m$. Comme les x_n sont différents, alors ce n est unique, et alors $p_n = 1$ et $p_k = 0$ pour $k \neq n$. Donc X est quasi-certain égale à x_n. □

Exercice 11.18.

Soit Ω fini de cardinal n. On le munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et on considère la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme. Pour X et Y des variables aléatoires sur Ω, on pose $\varphi(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$.

1. Montrer que φ fait de l'espace des variables aléatoires sur Ω un espace euclidien.
2. Soit V le sous-espace formé des variables certaines, et X une variable aléatoire. Quel est le projeté orthogonal de X sur V ? Quelle est la distance de X à V ? Interpréter.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}((X - a)^2) \leqslant V(X)$.
4. On note $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ le coefficient de corrélation de X et Y.
   (a) Montrer que $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$. Quand y-a-t-il égalité ?
   (b) Soit X une variable aléatoire non-certaine, et Y une variable aléatoire quelconque. Quel est le projeté orthogonal de Y sur $W = \mathrm{vect}(1, X)$? Quelle est la distance de Y à V ?

Solution. 1. On vérifie que φ est symétrique, bilinéaire et positive. De plus, si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ alors pour tout $n \geqslant 1$ on a $\mathbb{P}(X = n) = 0$, donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ et X est la variable aléatoire certaine nulle. Donc φ est un produit scalaire. Comme l'espace considéré est de dimension n finie (il s'agit simplement de l'espace des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$, donc est isomorphe à $\mathbb{R}^n$), il s'agit bien d'un espace euclidien.

2. Une base orthonormée de V pour le produit scalaire considéré est la variable certaine égale à 1. Le projeté de X est donc $\varphi(X, 1)\times 1 = \mathbb{E}(X)$, et la distance est $\sqrt{\varphi(X, X) - \varphi(\mathbb{E}(X), E(X))}$, càd $\sqrt{\mathbb{E}(X^2 - \mathbb{E}(X)^2)}$. La distance est donc $\sigma(X)$. On retrouve le fait qu'une variable aléatoire est certaine si et seulement si son écart-type est nul.
3. D'après ce qui précède, $\mathbb{V}(X) = d(X, V)^2$. Comme $E((X - a)^2) = \varphi(X - a, X - a) = \|X - a\|^2$, alors l'inégalité demandée est claire, car $a \in V$ donc $\|X - a\| \geqslant d(X, V)$.
4. (a) On considère $f(t) = \mathbb{V}(tX + Y) = t^2\mathbb{V}(X) + 2t\mathrm{cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$. Comme une variance est toujours positive, le discriminant de ce polynôme en t est $\leqslant 0$, donc $4\mathrm{cov}(X, Y)^2 \leqslant 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$, d'où le résultat en prenant la racine. Il y a égalité si et seulement si le discriminant s'annule, si et seulement s'il existe t tel que $f(t) = \mathbb{V}(tX + Y) = 0$, si et seulement s'il existe t tel que $tX + Y$ est certaine.
   (b) Comme X n'est pas certaine, W est de dimension 2. Il faut en déterminer une BON, en orthonormalisant la famille $(1, X)$ par exemple, avec Gram-Schmidt. Le procédé donne $X' = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ et $(1, X')$ est une BON de W. Ainsi, le projeté de Y sur W est
   $$p(Y) = \varphi(Y, 1)1 + \varphi(Y, X')X' = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y(X - E(X)))\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{V}(X)} = \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(X)}(X - \mathbb{E}(X)$$

où on a utilisé $\mathbb{E}((X-E(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))Y)$. La distance est alors

$$\begin{aligned} d(Y,W)^2 &= \mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(p(Y)^2)=\mathbb{E}(Y^2)-\left(\mathbb{E}(Y)^2+\frac{\operatorname{cov}(X,Y)^2}{\mathbb{V}(X)^2}\mathbb{V}(X)+0\right) \\ &= \mathbb{V}(Y)-\frac{\operatorname{cov}(X,Y)^2}{\mathbb{V}(X)}=\mathbb{V}(Y)\left(1-\rho(X,Y)^2\right) \end{aligned}$$

donc $d(Y,W)=\sigma(Y)\sqrt{1-\rho(X,Y)^2}$. Donc $Y\in W$ si et seulement si $\sigma(Y)=0$ (càd Y certaine) ou si $|\rho(X,Y)|=1$.

□

12 Équations différentielles linéaires

Exercice 12.1.
Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x''+x'+4y'-x-3y &= 0 \\ y''-3y'+x+3y &= 0 \end{cases}$.

Solution. On pourrait se ramener à une forme matricielle ainsi. On a $X''+A_1X'+A_0X=0$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3\end{pmatrix}$ et $A_0=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Ceci donne $Y'+AY=0$, où $Y=\begin{pmatrix} X \\ X'\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ A_0 & A_1\end{pmatrix}$. On résout cette équation en calculant $\exp(-A)$; il y a des calculs, même si on peut s'en sortir car la matrice a quelques 0.

On peut faire autrement. En additionnant les deux équations du système, on tombe sur $f'+f=0$ avec $f=(x+y)'$. On en déduit $x'(t)+y'(t)=\lambda e^{-t}$ donc $x(t)+y(t)=-\lambda e^{-t}+\mu$ (avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$). En remplaçant x dans la deuxième équation, on a $y''-3y'+2y=\lambda e^{-t}-\mu$. L'équation caractéristique de l'équation homogène est $(r-1)(r-2)=0$, de sorte qu'une solution homogène est $y_h(t)=\alpha e^t+\beta e^{2t}$. On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t)=a+be^{-t}$. Après calculs, on a $y_p''-3y_p'+2y_p=2a+6be^{-t}$ donc par identification : $a=\frac{\lambda}{2}$ et $b=-\frac{\mu}{6}$.

La solution générale est somme de la solution homogène et d'une solution particulière, donc de la forme

$$\begin{cases} y(t) &= \alpha e^t+\beta e^{2t}+\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\mu}{6}e^{-t} \\ x(t) &= \mu-\lambda e^{-t}-y(t) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

□

Exercice 12.2.
Résoudre l'équation différentielle $2xy'-y=\frac{2}{3}x^{3/2}$.

Solution. Le terme $x^{3/2}$ impose de chercher les solutions sur $\mathbb{R}_+$. Pour mettre sous forme résolue, il faut diviser par x donc supposer $x\neq 0$: on cherche donc les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Regardons d'abord l'équation homogène : $y' - \dfrac{1}{2x}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ est $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{2}$, de sorte qu'une solution homogène est $y_h(x) = \lambda e^{\ln(x)/2} = \lambda\sqrt{x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution sous la forme $y(x) = \lambda(x)\sqrt{x}$. On a $y'(x) = \lambda'(x)\sqrt{x} + \lambda(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $\dfrac{2}{3}x^{3/2} = 2xy'(x) - y(x) = 2x\lambda'(x)\sqrt{x} + \lambda(x)\sqrt{x} - \lambda(x)\sqrt{x} = 2\lambda'(x)x^{3/2}$ donc $\lambda'(x) = \dfrac{1}{3}$, càd $\lambda(x) = \dfrac{x}{3} + A$ avec $A \in \mathbb{R}$, donc les solutions sont de la forme $y(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{3} + A\sqrt{x}$. □

Exercice 12.3.
Résoudre l'équation différentielle $|t|y' + (t-1)y = t^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$.

Solution. Sur $\mathbb{R}_+^*$ on met l'équation sous forme résolue : $y' + \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)y = t^2$. Les solutions homogènes sont $y_h(t) = \lambda \exp\left(\displaystyle\int_a^t \left(\frac{1}{u} - 1\right) du\right) = \lambda e^{\ln(t) - \ln(a) - t + a} = \lambda t e^{-t}$ (en renommant la constante λ). On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda(t) t e^{-t}$. On a $y_p'(t) = (\lambda'(t)t + \lambda(t) - \lambda(t)t)e^{-t}$ donc en reportant dans l'équation on obtient $\lambda'(t)e^{-t} = t$ donc $\lambda(t) = \displaystyle\int_a^t ue^u du + C = te^t - e^t + C$ (la constante C a été renommée). La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y(t) = t^2 - t + \lambda t e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on fait pareil, avec $|t| = -t$ donc $y' + \left(\dfrac{1}{t} - 1\right)y = -t^2$. On trouve comme solution homogène $y_h(t) = \dfrac{\mu}{t}e^t$. Par variation des constantes, $\mu'(t) = -t^3e^{-t}$ donc $\mu(t) = (t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t} + C$ et la solution générale sur $\mathbb{R}_-^*$ est donc $y(t) = t^2 + 3t + 6 + \dfrac{6}{t} + \dfrac{\mu}{t}e^t$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, il faut que ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ se raccordent en 0 de façon dérivable. Notons $y_+(t) = t^2 - t + \lambda t e^{-t}$ et $y_-(t) = t^2 + 3t + 6 + \dfrac{6}{t} + \dfrac{\mu}{t}e^t$ ces restrictions. Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} y_+(t) = 0$, alors on doit nécessairement avoir $\mu = -6$ (écrire $e^t = 1 + t + o(t)$) pour assurer la continuité de la solution y (et $y(0) = 0$). Par ailleurs, $y_+'(0) = \lambda - 1$. En écrivant $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $y_-(t) = t^2 + o(t)$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^-} y_-'(t) = 0$. Pour que y soit dérivable en 0, il faut donc que $\lambda = 1$. Ainsi, il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$, déterminée par $\lambda = 1$ et $\mu = 6$. □

Exercice 12.4.
Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x + 2y - z \\ y' & = & -x + 2y - z + t \\ z' & = & -x + 2y - z + 5 \end{array}\right.$.

Solution. On a $X' = AX + b(t)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}$. Une solution du système homogène est donnée par $X_h(t) = e^{tA}X_0$. Or, on remarque que $A^2 = 0$

donc $e^{tA} = I_3 + tA$. Ainsi, $X_h(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 2t & -t \\ -t & 1+2t & -t \\ -t & 2t & 1-t \end{pmatrix} X_0$. On cherche ensuite une solution particulière $X_p(t) = e^{tA}X_0(t)$. On a $X_p'(t) = AX_p(t) + e^{tA}X_0'(t) = AX_p(t) + b(t)$, ce qui donne $X_0'(t) = e^{-tA}b(t) = \begin{pmatrix} 1+t & -2t & t \\ t & 1-2t & t \\ t & -2t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^2+5t \\ t-2t^2+5t \\ -2t^2+5+5t \end{pmatrix}$. En intégrant, on trouve une solution particulière $X_0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 \\ -\frac{2}{3}t^3 + 5t + \frac{5}{2}t^2 \end{pmatrix}$ (on a choisi les constantes nulles). Enfin, la solution générale est donnée par $X(t) = X_h(t) + X_p(t) = e^{tA}(X_0 + X_0(t))$. □

Exercice 12.5.
Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ l'opérateur de dérivation. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on considère l'équation différentielle à coefficients complexes constants $P(D)(y) = 0$, c'est-à-dire $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y$. On note $\mathcal{S}(P)$ l'ensemble des solutions de l'équation.

1. Soit $P_1, ..., P_r \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Montrer que $\mathcal{S}(P_1...P_r) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{S}(P_k)$.
2. Soit $P_n = (X-a)^n$. Montrer que $\mathcal{S}(P_n) = \{t \mapsto Q(t)e^{at},\ Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant. Déterminer $\mathcal{S}(P)$.

Solution.

1. Par définition, $\mathcal{S}(P_k) = \ker(P_k(D))$. Par le lemme des noyaux et hypothèse, on a $\mathcal{S}(P_1...P_r) = \ker((P_1...P_r)(D)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(P_k(D)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{S}(P_k)$.
2. Commençons avec $n = 1$. L'équation est $y' - ay = 0$, qui s'intègre en $y(t) = \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Comme $P_n(D) = P_{n-1}(P_1(D))$ alors une solution y de $P_n(D)(y) = 0$ vérifie de manière équivalente $P_1(D)(y) \in \mathcal{S}(P_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $P_1(D)(y)(t) = Q(t)e^{at}$ avec $Q \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$, càd $y' - ay = Q(t)e^{at}$. En remarquant que $y' - ay = e^{at}(ye^{-at})'$, on a donc de manière équivalente $(ye^{-at})' = Q(t)$, càd $y = R(t)e^{at}$ où R est une primitive de Q, donc $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ceci qui achève la récurrence et montre le résultat.
3. Dans $\mathbb{C}$, on peut factoriser $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{n_k}$. Notons $P_k = (X-a_k)^{n_k}$, alors les P_k sont premiers entre eux deux à deux. Par la question 1 : $\mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(\lambda) \oplus \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{S}(P_k)$. On a $\mathcal{S}(\lambda) = \{0\}$ si $\lambda \neq 0$, et par la question 2 : $\mathcal{S}(P_k) = \{t \mapsto Q(t)e^{a_k t},\ Q \in \mathbb{C}_{n_k-1}[X]\}$. On conclut donc : $\mathcal{S}(P) = \{t \mapsto Q_1(t)e^{a_1 t} + ... + Q_r(t)e^{a_r t},\ Q_k \in \mathbb{C}_{n_k-1}[X]\}$.

□

Exercice 12.6.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} (f'(t) + \alpha f(t)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Solution. Notons $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, et considérons $g(t) = f(t)e^{\alpha t}$. On calcule $g'(t) = (f'(t) + \alpha f(t))e^{\alpha t}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f'(t) + \alpha f(t)| \leqslant \varepsilon$ si $t \geqslant A$. Alors pour $t \geqslant A$ on a $|g'(t)| \leqslant \varepsilon e^{at}$. En intégrant, on a donc

$$|g(t) - g(A)| = \left| \int_t^A g'(x)dx \right| \leqslant \int_t^A |g'(x)|dx \leqslant \int_t^A \varepsilon e^{ax}dx = \frac{\varepsilon}{a}(e^{at} - e^{aA}),$$

donc $|g(t)| \leqslant |g(A)| + \frac{\varepsilon}{a}\left(e^{at} - e^{aA}\right)$. En repassant à f, on obtient

$$|f(t)| \leqslant |g(A)|e^{-at} + \frac{\varepsilon}{a}\left(1 - e^{a(A-t)}\right) \leqslant |g(A)|e^{-at} + \frac{\varepsilon}{a}$$

car $t \geqslant A$. On peut alors prendre $B > A$ tel que si $t \geqslant B$, on a $|g(A)|e^{-at} \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$, et ceci conclut.
□

Exercice 12.7.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues. On s'intéresse à $(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

1. Soit u, v deux solutions de (E), et soit w leur wronskien. Soit $a \in I$, exprimer $w(t)$ en fonction de $w(a)$.

Dans la suite, on prend $I = \mathbb{R}_+$ et $p = 0$; l'équation est donc $(E) : y'' + q(t)y = 0$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|dt$ converge.

2. Soit u une solution bornée de (E). Étudier le comportement de u' en $+\infty$.
3. Montrer que (E) admet des solutions non-bornées.

Solution.
1. On a $w = uv' - u'v$, donc
$$w' = u'v' + uv'' - u''v - u'v' = u(-pv' - qv) - (-pu' - qu)v = -p(uv' - u'v) = -pw.$$
Ainsi, $w(t) = w(a)\exp\left(-\displaystyle\int_a^t p(x)dx\right)$.
2. On a $u''(t) = -q(t)u(t)$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} u''(t)dt$ converge car u est bornée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|dt$ converge. On en déduit que u' admet une limite ℓ en $+\infty$. Si $\ell \neq 0$, alors $u'(t) \sim \ell$ en $+\infty$, donc $u(t) \sim \ell t$ en $+\infty$, ce qui contredit le fait que u soit bornée. Donc $\ell = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u'(t) = 0$.

3. Supposons que toutes les solutions de (E) soit bornées. L'ensemble des solutions est un espace de dimension 2 ; soit (u, v) une base de cet espace. D'après la question 2, u' et v' tendent vers 0 en $+\infty$. Alors le wronskien $w = uv' - u'v$ tend aussi vers 0 en $+\infty$, car u et v sont bornées. Or, ce wronskien est constant d'après la question 1 (car $p = 0$), donc nul (car limite nulle). Ceci contredit le fait que (u, v) est une base. Il existe donc des solutions non-bornées.

$\square$

Exercice 12.8 (Lemme de Gronwall).

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a \in I$ et $y, f, g : I \to \mathbb{R}_+$ des fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in I$ on a $y(x) \leqslant f(x) + \displaystyle\int_a^x y(t)g(t)dt$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in I$ on a $y(x) \leqslant f(x) + \displaystyle\int_a^x f(s)g(s)\exp\left(\int_s^x g(u)du\right)ds$.
   (b) Si f est constante égale à λ, montrer que pour tout $x \in I$ on a $y(x) \leqslant \lambda \exp\left(\displaystyle\int_a^x g(s)ds\right)$.
2. Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante. Montrer que toutes les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. 1. (a) On considère $F(x) = \displaystyle\int_a^x y(t)g(t)dt$, de sorte que $y \leqslant f + F$ et $F'(x) = y(x)g(x)$. Comme $g \geqslant 0$, on a $yg \leqslant fg + gF$, càd $F' - gF \leqslant fg$. En posant $G(x) = F(x)\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(u)du\right)$, l'inégalité précédente s'écrit, en multipliant par $\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(u)du\right)$: $G'(x) \leqslant f(x)g(x)\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(u)du\right)$. En intégrant, et avec $G(a) = F(a) = 0$, on a donc $G(x) \leqslant \displaystyle\int_a^x f(s)g(s)\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right)ds$, ce qui donne $F(x) \leqslant \displaystyle\int_a^x f(s)g(s)\exp\left(\int_s^x g(u)du\right)ds$ en utilisant la relation de Chasles. On reporte alors dans $y \leqslant f + F$.

(b) On part de l'inégalité précédente : $y(x) \leqslant \lambda + \lambda\displaystyle\int_a^x g(s)\exp\left(\int_s^x g(u)du\right)ds$. Comme une primitive de $-v'e^v$ est $-e^v$, alors

$$\int_a^x g(s)\exp\left(\int_s^x g(u)du\right)ds = \exp\left(\int_a^x g(u)du\right) - \exp\left(\int_x^x g(u)du\right) = \exp\left(\int_a^x g(u)du\right) - 1$$

et on a bien le résultat en reportant.

2. On a $2y'y'' + 2q(t)yy' = 0$ donc en intégrant : $y'(x)^2 - y'(0)^2 + 2\displaystyle\int_0^x q(t)y(t)y'(t)dt = 0$. En intégrant par parties, avec $u = q$ et $v' = 2yy'$, on a $2\displaystyle\int_0^x q(t)y(t)y'(t)dt = q(x)y(x)^2 -$

$q(0)y(0)^2 - \int_0^x q'(t)y(t)^2dt$. Si on pose $\lambda = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2$ on a $y'(x)^2 + q(x)y(x)^2 = \lambda + \int_0^x q'(t)y(t)^2dt$, donc

$$q(x)y(x)^2 \leqslant \lambda + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}q(t)y(t)^2dt.$$

On est dans la situation du lemme de Gronwall avec $g = \frac{q'}{q}$. On a $\int_0^x g(s)ds = \ln(q(x)) - \ln(q(0))$ et donc $q(x)y(x)^2 \leqslant \lambda\exp(\ln(q(x)) - \ln(q(0))) = \lambda\frac{q(x)}{q(0)}$. Donc $y(x)^2 \leqslant \frac{\lambda}{q(0)}$ d'où le résultat.

□

13 Calcul différentiel

Exercice 13.1 (Échauffement).

1. Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ différentiable et
$$g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(uv^2, ue^{uv}, 3u - \cos(uv)).$$
Calculer les dérivées partielles de g.
2. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable,
$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, -x) \quad \text{et} \quad h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x).$$
Calculer les dérivées partielles de g et de h.
3. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable et
$$g : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(uvw, ue^{vw^2} - v).$$
Calculer les dérivées partielles de g.

Solution. On applique la règle de la chaîne... □

Exercice 13.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t > 0$ on a $f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est linéaire.

Solution. Si on fixe $x \neq 0$, alors $f(tx) = tf(x)$ tend vers 0 quand $t \to 0$. Comme f est différentiable en 0, elle est continue en 0 donc $f(0) = 0$. Puis, on écrit $tf(x) = f(tx) = 0 + df_0(tx) + o(t)$, c'est-à-dire $tf(x) = tdf_0(x) + t\varepsilon(t)$ donc $f(x) = df_0(x) + \varepsilon(t)$. Dans la limite $t \to 0$ on obtient $f(x) = df_0(x)$ donc $f = df_0$ est linéaire. □

Exercice 13.3 (Courbe elliptique).
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $P(x,y) = y^2 - x^3 - ax - b$. Soit E la courbe d'équation $P(x,y) = 0$. Un point singulier de E est un point de E qui est un point critique de P. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E n'ait pas de point singulier.

Solution. On calcule $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -(3x^2+a)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$. Par définition, un point singulier est solution du système $\left\{\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & 0 \\ \partial P/\partial x & = & 0 \\ \partial P/\partial y & = & 0 \end{array}\right.$ c'est-à-dire de $\left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & x^3+ax+b \\ 3x^2+a & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array}\right.$. Un point est donc singulier si et seulement si $y = 0$ et si x est racine double de x^3+ax+b. Donc il existe des points singuliers si et seulement si x^3+ax+b a des racines doubles.

Poursuivons. Soit x une racine double, puisque $3x^2+a = 0$ alors $x = \pm\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$. Comme x est racine de $x^3+ax+b = 0$ on a $\mp\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{-a}{3}} \pm a\sqrt{\dfrac{-a}{3}} + b = 0$ i.e. $\pm a\sqrt{\dfrac{-a}{3}}\left(-\dfrac{1}{3}+1\right) + b = 0$ donc $\pm\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{-a}{3}} = -b$. En élevant au carré, on a $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Une condition suffisante pour ne pas avoir de point singulier est donc $4a^3+27b^2 \neq 0$. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Si $4a^3+27b^2 = 0$, on vérifie que le point $\left(\sqrt{\dfrac{-a}{3}}, 0\right)$ est un point singulier. $\square$

Exercice 13.4 (Un difféomorphisme).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+y, xy)$, et soit $U = \{x < y\}$.

1. Montrer que f est injective sur U, et déterminer $V = f(U)$.
2. Montrer que U et V sont ouverts.
3. Montrer que f réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans V, et que sa réciproque g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer la différentielle de g.

Solution.
1. Soit (u,v) dans $\mathbb{R}^2$, on chercher à résoudre $x+y = u$ et $xy = v$. Ceci est équivalent à x, y racine de $X^2 - uX + v$. Notons $\Delta = u^2 - 4v$. Si $\Delta < 0$ il n'y a pas de solution. Si $\Delta = 0$ on a $v = \dfrac{u^2}{4}$ et alors $x = y$, donc $(x,y) \notin U$. Si $\Delta > 0$ alors on a deux racines distinctes. Comme on cherche à avoir $x < y$ on a $x = \dfrac{u - \sqrt{u^2-4v}}{2}$ et $y = \dfrac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}$. Ainsi, $f(x,y) = (u,v)$ admet au plus une solution (x,y) dans U, ce qui montre que f est injective sur U. Par ailleurs, on a une solution dans U si et seulement si $\Delta > 0$, donc $V = f(U) = \{u > 4v^2\}$.
2. Écrire comme images réciproques d'ouverts par des applications continues.
3. La fonction f est polynômiale donc $\mathcal{C}^1$, et comme elle est injective sur U c'est par définition de V une bijection $U \to V$. Les formules précédentes montrent que sa réciproque est donnée

par $g(u,v) = \left(\frac{u-\sqrt{u^2-4v}}{2}, \frac{u+\sqrt{u^2-4v}}{2}\right)$. Comme $u^2 > 4v$ sur V, alors le terme sous la racine ne s'annule pas donc g est $\mathcal{C}^1$. On calcule la jacobienne de g...

$\square$

Exercice 13.5 (Fonctions holomorphes).
Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est dérivable par rapport à la variable complexe, c'est-à-dire si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ (où $h \in \mathbb{C}$) existe. Dans ce cas, on note $f'(z)$ cette limite.

En identifiant $z = x + iy \in \mathbb{C}$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, peut s'écrire de façon unique $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = g(x,y)$, où $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est holomorphe si et seulement si u et v sont différentiables et vérifient les équations de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
2. Montrer que si f est holomorphe et si u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors u et v sont harmoniques, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (et idem pour v).

Solution. 1. Si f holomorphe, on montre sans soucis que g est différentiable, puis que u et v le sont. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x+iy$ et $h \in \mathbb{R}$. En faisant $h \to 0$ dans $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}$ on obtient $f'(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$; puis en faisant $h \to 0$ dans $\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \frac{g(x,y+h)-g(x,y)}{ih}$ on obtient $f'(z) = -i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$. On en déduit $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, et en identifiant parties réelles et imaginaires on trouve les équations de Cauchy-Riemann.
Réciproquement, on écrit $f((x+iy)+(h+ik)) = g(x+h,y+k) = g(x,y) + h\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + o((h,k))$. Avec $\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial x}$ on a $\frac{g(x+h,y+k)-g(x,y)}{h+ik} = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + o(1)$, et ceci admet une limite quand $h+ik \to 0$, donc f est holomorphe.

2. On calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en utilisant successivement Cauchy-Riemann, Schwarz (les fonctions sont $\mathcal{C}^2$) et à nouveau Cauchy-Riemann. Idem pour v.

$\square$

Exercice 13.6.
Soit $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$.

1. Donner une interprétation géométrique de f, et en déduire ses extrema.
2. Retrouver les extrema de f par le calcul.

Solution. 1. La fonction f donne la somme des distance entre le point (x, y) et les points $(0,1)$ et $(1,0)$. Elle n'a donc pas de maximum, mais tout point du segment reliant $(0,1)$ et $(1,0)$ réalise un minimum, qui vaut $\sqrt{2}$.

2. Si on fixe x, alors $f(x, y) \to +\infty$ quand $y \to +\infty$, donc f n'a pas de maximum.
Pour trouver les minima, on regarde les points d'annulation de la différentielle. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, sauf peut-être en $(0,1)$ et $(1,0)$ (car la racine carrée n'est pas dérivable en 0). En dehors de ces points, on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}} - \dfrac{1-x}{\sqrt{y^2+(1-x)^2}}$ (et une expression symétrique en x, y pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$). Donc (x, y) est critique si et seulement si les vecteurs $(x, 1-x)$ et $(1-y, y)$ sont colinéaires au vecteur $(\sqrt{y^2+(1-x)^2}, \sqrt{x^2+(1-y)^2})$, donc sont colinéaires entre eux, si et seulement si $\begin{vmatrix} x & 1-y \\ 1-x & y \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $y = 1-x$.
Pour $y = 1-x$, on obtient $f(x, y) = \sqrt{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x, y) = (2x-1)\sqrt{2} \geqslant \sqrt{2}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x, y) = (1-2x)\sqrt{2} \geqslant \sqrt{2}$ si $x \leqslant 0$. On en déduit que si un minimum existe, il vaut $\sqrt{2}$ et est atteint sur le segment $y = 1-x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Or, $f(x, y) \geqslant \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \|(x, y)\|_1$. Donc si $\|(x, y)\|_1 > \sqrt{2}$ alors $f(x, y) > \sqrt{2}$. Ainsi, si f admet un minimum alors il est atteint sur la boule fermée $\overline{B(0, \sqrt{2})}$. Or, cette boule est compacte dans $\mathbb{R}^2$. Comme f y est continue, elle admet et atteint un minimum, qui est donc $\sqrt{2}$.

$\square$

Exercice 13.7.
Déterminer les triangles d'aire maximale parmi ceux inscrits dans un cercle.

Solution. Par translation et homothétie, on se ramène au cas du cercle unité. Par rotation, on peut supposer qu'un des côtés du triangle est horizontal, et d'ordonnée positive. Les extrémités de ce côté sont alors $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $(-\cos(\theta), \sin(\theta)$ pour un certain $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce côté étant fixé comme base, l'aire du triangle est maximale si la hauteur l'est. Comme $\sin(\theta) \geqslant 0$, le troisième sommet est nécessairement $(0, -1)$.

L'aire du triangle est alors $A(\theta) = \cos(\theta)(1+\sin(\theta))$. Ceci est une fonction continue sur le compact $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc elle atteint un maximum. Sa dérivée est $A'(\theta) = -\sin(\theta)(1+\sin(\theta)) + \cos(\theta)^2$ c'est-à-dire $A'(\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 - \sin(\theta) = \cos(2\theta) - \sin(\theta) = \cos(2\theta) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$. Donc les points critiques sont les θ tels que $2\theta = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \mod 2\pi$. Cela donne $\theta = \dfrac{\pi}{6} \mod \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$. Comme $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Par existence du maximum (sur un compact), on a bien affaire à un maximum (le minimum est atteint sur un bord su segment). Bref, les triangles inscrits d'aire maximale sont les triangles équilatéraux. $\square$

Exercice 13.8 (Convexité et extrema).

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur U si pour tout $(x, y) \in U^2$ et tout $t \in [0, 1]$ on a $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$.

1. On suppose que f est différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in U^2$, $f(y) - f(x) \geqslant df_x(y - x)$.
2. On suppose que f est convexe, différentiable en $a \in U$ et que $df_a = 0$. Montrer que f admet un minimum global en a.

Solution.

1. Si f est convexe, l'inégalité de convexité se récrit $f((1-t)x + ty) - f(x) \leqslant t(f(y) - f(x)$ donc $\dfrac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x)$. Comme f est différentiable en x, et par linéarité de df_x, on écrit $f(x + t(y - x)) - f(x) = t df_x(y - x) + o(t)$. On obtient $df_x(y - x) + o(1) \leqslant f(y) - f(x)$ et ok quand $t \to 0$.
   Réciproquement, notons $z = (1-t)x + ty$. L'hypothèse donne $f(x) - f(z) \geqslant df_z(x - z)$ et aussi $f(y) - f(z) \leqslant df_z(y - z)$. On multiplie la première inégalité par $1-t$ et la deuxième par t, puis on ajoute pour obtenir $(1-t)f(x) + tf(y) - f(z) \geqslant df_z((1-t)x + ty - z) = df_z(0) = 0$, d'où la convexité de f.
2. Dans le sens direct de la première question, on n'a utilisé que la différentiabilité en x. Ici, avec $x = a$ on peut donc écrire $f(y) - f(a) \geqslant df_a(y - a) = 0$, et ok.

□

Exercice 13.9.

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2y^3$. On pourra poser $u = x$ et $v = xy$.

Solution. Notons $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, xy)$ le changement de variables. Il est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais injectif uniquement sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$. On calcule $J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ donc le jacobien est $\det(J\varphi(x, y)) = x$ est non-nul sur U, donc $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (en fait, $V = U$). Soit $g = f \circ \varphi^{-1}$; f est $\mathcal{C}^1$ sur U ssi g l'est sur V. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + y\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{\partial g}{\partial v}$, donc l'équation devient $x\dfrac{\partial g}{\partial u} = x^2y^3$ c'est-à-dire $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{v^3}{u^2}$ (sur U). Alors $g(u, v) = -\dfrac{v^3}{u} + G(v)$ avec G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; puis sur U on a $f(x, y) = -x^2y^3 + G(xy)$ avec $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette fonction se prolonge en façon $\mathcal{C}^1$ à $\mathbb{R}^2$ par la même formule. □