

# TD 10 : plans tangents et première forme fondamentale

## Indispensable

### Exercice 1 (Surface tubulaire).

Soit  $C$  une courbe gauche régulière paramétrée par longueur d'arc par  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On suppose que sa courbure  $\kappa$  vérifie  $0 < \kappa < A$  pour un certain  $A > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et

$$\varphi(t, \theta) = \alpha(t) + \varepsilon(\cos(\theta)N(t) + \sin(\theta)B(t)).$$

La surface  $S$  paramétrée par  $\varphi$  est appelée *surface tubulaire*.

1. Montrer que si  $\varepsilon < 1/A$ , alors  $S$  est une surface paramétrée immergée. Peut-il y avoir des points d'auto-intersection ?
2. Calculer les vecteurs normaux à  $S$ , ainsi que les plans tangents.

### Exercice 2 (Première forme fondamentale de la sphère).

Soit  $r > 0$  et  $S_r \subset \mathbb{R}^3$  la sphère de rayon  $r$  définie par  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

1. Montrer que  $S_r$  est une surface régulière, et déterminer l'équation du plan tangent  $T_p S_r$  pour tout point  $p \in S_r$ .

On rappelle (cf. TD 9, exercice 3) que l'application  $\varphi : ]-\pi, \pi[ \times ]0, \pi[$  donnée par

$$\varphi(u, v) = r(\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v))$$

est une paramétrisation régulière de  $S_r \setminus \{(x, y, z) \in S_r \mid x \leq 0, y = 0\}$ .

2. Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale de la sphère  $S_r$ .

### Exercice 3 (Surface de révolution).

Une *surface de révolution* est obtenue en faisant tourner une courbe autour de l'axe  $(Oz)$ . Soit  $C$  une courbe régulière paramétrée par  $t \mapsto (f(t), 0, g(t))$ , et  $S$  la surface de révolution associée à  $C$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas.

1. Déterminer une paramétrisation de  $S$ , et montrer que  $S$  est une surface régulière.
2. Calculer les coefficients de la première forme fondamentale.
3. Décrire la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  (privée des pôles nord  $N$  et sud  $S$ ) comme une surface de révolution. En déduire un paramétrage de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$  et déterminer les coefficients de la première forme fondamentale. (*Plusieurs réponses possibles selon la description choisie !*)

## Pour s'entraîner (facultatif)

### Exercice 4 (Parapluie de Whitney).

Soit  $W$  la surface paramétrée par  $\varphi(u, v) = (uv, u, v^2)$ .

1. Montrer que la demi-droite  $\{x = y = 0, z > 0\}$  est formée de points doubles, et que l'origine est un point singulier.  
(Un point est dit simple (resp. double, triple, etc) si sa pré-image par le paramétrage  $\varphi$  est de cardinal 1 (resp. 2, 3, etc).)
2. Déterminer le plan tangent  $T_p W$  pour  $p \neq 0$ .
3. Montrer que le vecteur  $N(u, v) = (-2u/v, 2u^2/v, 1)$  est normal à  $W$ . Ce vecteur admet-il une limite quand  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ ? Qu'en déduire pour les plans tangents?

### Exercice 5 (Première forme fondamentale du tore).

Soit  $R > r > 0$  et  $T_{R,r}$  le tore défini par  $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$ .

1. Montrer que  $T_{R,r}$  est une surface régulière, et déterminer l'équation du plan tangent  $T_p T_{R,r}$  pour tout point  $p \in T_{R,r}$ .
2. Montrer que  $\varphi : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos(v)) \cos(u), (R + r \cos(v)) \sin(u), r \sin(v))$$

est un paramétrage régulier de  $T_{R,r} \setminus (M \cup P)$ , où  $M$  est le méridien donné par  $M = \{(x, y, z) \in T_{R,r} \mid (x+R)^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ , et  $P$  est le parallèle donné par  $P = \{(x, y, 0) \in T_{R,r} \mid x^2 + y^2 = (R-r)^2\}$ .

3. Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale du tore  $T_{R,r}$ .