

TD 11 : première forme fondamentale

Indispensable

Exercice 1 (Première forme fondamentale de la sphère).

Soit $S_r \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de rayon $r > 0$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. On considère le paramétrage régulier $\varphi :]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ de $S_r \setminus \{(x, y, z) \in S_r \mid x \leq 0, y = 0\}$ donné par

$$\varphi(u, v) = r(\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

1. Rappeler les coefficients de la première forme fondamentale de la sphère S_r .
2. Montrer que la distance intrinsèque entre les points opposés $(r, 0, 0)$ et $(-r, 0, 0)$ de S_r est majorée par πr .
3. Calculer l'aire de la sphère S_r .

Exercice 2 (Première forme fondamentale du tore).

Soit $R > r > 0$ et $T_{R,r}$ le tore défini par $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$. On admet que c'est une surface régulière et que $\varphi :]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos(v)) \cos(u), (R + r \cos(v)) \sin(u), r \sin(v))$$

est un paramétrage régulier de $T_{R,r} \setminus (M \cup P)$, où M est le méridien donné par $M = \{(x, y, z) \in T_{R,r} \mid (x + R)^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, et P est le parallèle donné par $P = \{(x, y, 0) \in T_{R,r} \mid x^2 + y^2 = (R - r)^2\}$.

1. Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale du tore $T_{R,r}$.
2. Montrer que la distance intrinsèque entre les points $(0, R + r, 0)$ et $(0, -R - r, 0)$ est majorée par $\pi(R + r)$.
3. Montrer que la distance intrinsèque entre les points $(R + r, 0, 0)$ et $(0, R, r)$ est majorée par $\frac{\pi}{2}(R + r)$.
4. Calculer l'aire du tore $T_{R,r}$.

Exercice 3 (Surface tubulaire).

Soit C une courbe gauche régulière paramétrée par longueur d'arc par $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. On suppose que sa courbure κ vérifie $0 < \kappa < A$ pour un certain $A > 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1/A$ et

$$\varphi(t, \theta) = \alpha(t) + \varepsilon(\cos(\theta)N(t) + \sin(\theta)B(t)).$$

On note S la surface tubulaire paramétrée par φ .

1. Calculer l'aire de S .
2. Application : retrouver l'aire du tore $T_{R,r}$.

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4 (Surface non-bornée d'aire finie).

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par $x^2 + y^2 = \exp(-z^2)$.

1. Dessiner S et montrer que S est une surface régulière.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(z, \theta) = (\exp(-z^2) \cos(\theta), \exp(-z^2) \sin(\theta), z).$$

Montrer que φ est une paramétrisation d'un ouvert de S qui est dense dans S , et que l'on précisera.

3. En observant que S est une surface de révolution, rappeler les coefficients de la première forme fondamentale. En déduire que l'aire de S est finie.

Exercice 5 (Surface de révolution).

Soit C une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc par $t \mapsto (f(t), 0, g(t))$, et S la surface de révolution associée à C , c'est-à-dire obtenue en faisant tourner C autour de l'axe (Oz) . On suppose que f ne s'annule pas, de sorte que S est régulière.

1. Rappeler (ou déterminer) une paramétrisation de S et les coefficients de la première forme fondamentale.
2. Montrer que l'aire de S est

$$2\pi \int_0^\ell |f(t)| dt$$

où ℓ est la longueur de C .

3. Applications : retrouver l'aire de la sphère S_r et du tore $T_{R,r}$.