TD 12 : plan tangent, orientation

Indispensable

Exercice 1 (Sphère).
Soit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité. On rappelle la paramétisation donnée par

$$\varphi(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

1. Soit $p \in \mathbb{S}^2$. Déterminer une base du plan tangent $T_p\mathbb{S}^2$.
2. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{S}^2$ en p. La sphère $\mathbb{S}^2$ est-elle orientable ?

   On rappelle que $\mathbb{S}^2$ est donnée par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
3. Soit $p \in \mathbb{S}^2$. Déterminer une équation plan tangent $T_p\mathbb{S}^2$.
4. Quel est le lien entre l'équation de $T_p\mathbb{S}^2$ et un vecteur normal à $\mathbb{S}^2$ en p ?

Exercice 2 (Ruban de Möbius).
On définit le ruban de Möbius $M \subset \mathbb{R}^3$ comme l'image du paramétrage $\varphi :]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\varphi(t,\theta) = ((1 + t\cos(\theta))\cos(2\theta), (1 + t\cos(\theta))\sin(2\theta), t\sin(\theta)).$$

1. Calculer les vecteurs normaux unitaires aux points images de $(t, \pi/2)$ et $(-t, -\pi/2)$.
2. En déduire que M n'est pas orientable.

Exercice 3 (Formes quadratiques).
On considère les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ données par :

1. $q(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$,
2. $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$,
3. $q(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$.

Pour chacune d'elles, répondre aux questions suivantes.

(a) Soit A la matrice de q dans la base canonique. Rappeler les liens entre q et A, et déterminer A.

(b) Calculer les valeurs propres de A. Qu'en déduire sur le signe de q ?

(c) Écrire $q(x,y)$ sous la forme $\pm u(x,y)^2 \pm v(x,y)^2$, avec u et v des formes linéaires. En déduire les domaines où $q(x,y) > 0$ et $q(x,y) < 0$.

(d) On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ donnée par $z = q(x,y)$. Déterminer T_0S (son plan tangent en 0). Quelle est la position de S par rapport à T_0S ?

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4 (Difféomorphisme et orientabilité).

Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières et $f : S_1 \to S_2$ une application différentiable.

1. On suppose que f est un difféomorphisme local en tout point. Montrer que si S_2 est orientable, alors S_1 l'est.
2. On suppose que f est un difféomorphisme global. Montrer que S_1 est orientable si et seulement si S_2 l'est.