TD 13 : deuxième forme fondamentale, courbures

Indispensable

Exercice 1 (Courbures du tore).
Soit $\rho > r > 0$ et $T_{\rho,r}$ le tore défini par la paramétrisation $\varphi :]-\pi,\pi[^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(u,v) = ((\rho + r\cos(v))\cos(u), (\rho + r\cos(v))\sin(u), r\sin(v)).$$

1. Rappeler les coefficients de la première forme fondamentale du tore.
2. Déterminer les coefficients de la deuxième forme fondamentale du tore.
3. En déduire les courbures (principales, de Gauss, et moyenne) du tore.
4. Représenter graphiquement les points pour lesquels la courbure de Gauss est strictement positive (*points elliptiques*), nulle (*points paraboliques*), et strictement négative (*points hyperboliques*).
5. Montrer que les courbures principales ne coïncident jamais (c'est-à-dire le tore n'a pas d'*ombilic*).
6. Montrer que la courbure de Gauss moyenne est nulle, c'est-à-dire

$$\int_{u,v} K(\varphi(u,v))\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv = 0.$$

Exercice 2 (Graphe d'une fonction).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, et $S \subset \mathbb{R}^3$ le graphe de S.

1. Donner une paramétrisation régulière de S.
2. Déterminer les coefficients des première et deuxième formes fondamentales de S en fonction des dérivées de f.
3. On suppose que $f(0,0) = 0$ et que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Justifier que $0 \in S$ et que $T_0 S = \{z = 0\}$.
4. Montrer que la première (resp. seconde) forme fondamentale en 0 est donnée par la matrice identité (resp. Hessienne de f), et en déduire les courbures (principales, de Gauss, et moyenne) de S en 0.
5. (Un exemple.) Soit $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) + xy - 2$. Montrer que 0 est un point parabolique isolé de S (où un point *parabolique* est un point où la courbure de Gauss est nulle, mais les courbures principales ne sont pas toutes les deux nulles).

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 3 (Ellipsoïde).
Soit $a, b, c > 0$ et $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde défini par

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

1. Représenter graphiquement $\mathcal{E}$. Montrer que c'est une surface régulière, et donner l'équation des plans tangents.
2. Montrer que $\varphi :]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ donnée par

   $$\varphi(u, v) = (a\cos(u)\sin(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(v))$$

   est une paramétrisation régulière d'un ouvert dense de $\mathcal{E}$ que l'on précisera.
3. Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale.
4. Déterminer les coefficients de la deuxième forme fondamentale en fonction de E, F et G.
5. En déduire que la courbure de Gauss de $\mathcal{E}$ au point $p = \varphi(u, v)$ est

   $$K(p) = \frac{(abc)^2\sin(v)^4}{(EG)^2}.$$

6. Que se passe-t-il dans le cas d'une sphère $(a = b = c)$?