TD 14 : *theorema egregium*

Indispensable

Exercice 1 (Part de pizza).

Soit P le plan paramétré par $\varphi(x,y) = (x,y,0)$ et C le cylindre paramétré par $\psi(x,y) = (\cos(x), \sin(x), y)$.

1. Montrer que P et C sont localement isométriques.
2. Quelle est la courbure de Gauss de P ? En déduire la courbure de Gauss de C.
3. Application : montrer que pour éviter que le coin d'une part de pizza tombe (et la garniture avec) lorsqu'on la mange, il suffit de plier la part de manière adéquate.
4. Montrer que les deuxièmes formes fondamentales de P et C sont différentes.

Exercice 2 (Planisphère).

1. Calculer la courbure de Gauss d'une sphère, et celle d'un plan.
2. Expliquer pourquoi tous les planisphères sont faux.

Exercice 3 (Symboles de Christoffel d'une surface de révolution).

1. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière d'une surface S.
   (a) Rappeler la définition des symboles de Christoffel $\Gamma_{i,j}^k$.
   (b) En déduire un système linéaire d'inconnues les symboles de Christoffel, et faisant intervenir E, F, G ainsi que leurs dérivées.
2. On suppose que S est une surface de révolution paramatrée par
$$\varphi(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$
   où f ne s'annule pas, de sorte que S est régulière.
   (a) Calculer les coefficients E, F et G.
   (b) Déterminer les symboles de Christoffel.

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4 (Caténoïde et hélicoïde).

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}^3$ des paramétrisations régulières de deux surfaces S et S'. On suppose que les coefficients des premières formes fondamentales de S et S' coïncident. Montrer que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to S'$ est une isométrie locale.
2. (Application.) Soit C la *caténoïde* paramatrée par

$$\varphi(x, y) = (\cosh(x)\cos(y), \cosh(x)\sin(y), x)$$

et H l'*hélicoïde* donnée par

$$\psi(x, y) = (x\cos(y), x\sin(y), y)$$

(dans les deux cas, le paramétrage est défini sur $U = \mathbb{R}\times]0, 2\pi[$).

(a) Montrer que

$$\widetilde{\psi}(x, y) = (\sinh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y), y)$$

est une autre paramétrisation (sur U) de H.

(b) Montrer que C et H sont localement isométriques.

(c) Calculer les courbures de Gauss.