TD 3 : inversion locale, fonctions implicites

Cours

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème d'inversion locale pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
2. Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une courbe $\{f(x, y) = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Démontrer le théorème des fonctions implicites (pour une courbe dans $\mathbb{R}^2$) à partir du théorème d'inversion locale.

Indispensable

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point, mais pas un difféomorphisme global.
2. Déterminer un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ maximal tel que $f : U \to f(U)$ soit un difféomorphisme.

Définition *Soit C une courbe paramétrée par une application lisse $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $p = \varphi(t_0)$ un point régulier de C (c'est-à-dire $\varphi'(t_0) \neq 0$). La* tangente à C en p *est la droite passant par p et dirigée par $\varphi'(t_0)$.*

Exercice 3.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = 0$, où $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$.

1. Caractériser les points (a, b) de $\mathcal{C}$ autour desquels y s'exprime comme fonction implicite de x. Pour ces points, déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$.
2. Quels sont les points autour desquels y n'est pas une fonction implicite de x ? Pour ces points, quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$?

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4 (Application dilatante).
Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application lisse telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|.$$

1. Montrer que l'image de f est fermée. (On pourra utiliser des suites.)
2. Montrer que l'image de f est ouverte (On pourra utiliser le théorème d'inversion locale.)
3. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme.

Exercice 5 (Folium de Descartes).
Soit F la courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = 0$, où $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Caractériser les points (a,b) de F pour lesquels le théorème des fonctions implicites donne localement y en fonction de x. Pour ces points, déterminer l'équation de la tangente à F.
2. Quels sont les points pour lesquels la question précédente ne s'applique pas ? Pour ces points, que dire de la tangente (si elle existe) ?
3. Déterminer une paramétrisation par des fonctions rationnelles de F, et dessiner l'allure de F