TD 4 : courbes planes

Indispensable

Définition *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application lisse et $a \in \mathbb{R}^n$.*

- ▷ *f est une* immersion *(resp. une* submersion*) en a si df_a est injective (resp. surjective).*
- ▷ *f est une* immersion *(resp. une* submersion*) si la condition précédente est vérifiée en tout point $a \in U$.*
- ▷ *f est un* plongement *si c'est une immersion qui est un homéomorphisme sur son image.*

Exercice 1.

1. Si f est une immersion (en a), que dire de n et p ? Et si f est une submersion (en a) ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Justifier que f est une immersion en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Justifier que f est une submersion en $a \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(a) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0$.

Exercice 2 (Équivalence des différentes définitions d'une courbe plane).
Soit $C \subset \mathbb{R}^2$. On dit que C est une *courbe plane régulière* si pour tout $p \in C$, il existe un voisinage U de p dans C et un plongement $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tel que U soit l'image de φ.

Soit $p \in C$. On veut montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(P) (**Paramétrisation**) C est une courbe plane régulière.

(CL) (**Carte locale**) Il existe un voisinage U de p dans C, un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $\Phi : V \to \Phi(V) \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(\{x = 0\}) = U$.

(É) (**Équation**) Il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^2$ et une submersion lisse $F : V \to \mathbb{R}$ tel que $C \cap V = \{F(x, y) = 0\}$.

(G) (**Graphe**) Quitte à composer par $(x, y) \mapsto (y, x)$, il existe un voisinage U de p dans C tel que U est le graphe d'une fonction lisse d'une variable $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Montrer (P) $\Rightarrow$ (CL) (on pourra utiliser le théorème d'inversion locale).
2. Montrer (CL) $\Rightarrow$ (É) (on pourra noter $\Phi^{-1}(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$ l'inverse de Φ).
3. Montrer (É) $\Rightarrow$ (G) (on pourra utiliser le théorème des fonctions implicites).
4. Montrer (G) $\Rightarrow$ (P).

Pour s’entraîner (facultatif)

Exercice 3.

On reprend les notations de l’exercice 2. Pour s’exercer, on peut montrer directement (c’est-à-dire sans utiliser les implications montrées dans l’exercice 2) d’autres implications entre les différentes définitions. Par exemple :

1. (G) $\Rightarrow$ (É),
2. (É) $\Rightarrow$ (CL),
3. (CL) $\Rightarrow$ (P),
4. (P) $\Rightarrow$ (G),
5. (G) $\Rightarrow$ (CL).

Exercice 4 (Des exemples).

Écrire chacune des quatre définitions équivalentes pour les courbes C suivantes, au point $p \in C$ indiqué.

1. La parabole paramétrée par $\varphi(t) = (t, t^2)$, et $p = (0, 0)$.
2. Le cercle $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, et $p = (1, 0)$.
3. Le graphe d’une fonction lisse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et p un point quelconque.