TD 5 : courbure et cercles osculateurs

Cours

Exercice 1 (Expression de la courbure pour l'abscisse curviligne).
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation d'une courbe par longueur d'arc.

1. Montrer que $\varphi'(s)$ et $\varphi''(s)$ sont orthogonaux pour tout $s \in I$.
2. Montrer que $\kappa(s) = \det(\varphi'(s), \varphi''(s))$.

Indispensable

Exercice 2 (Développée d'une courbe).
Soit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ une paramétrisation régulière d'une courbe Γ. On note $N(t)$ le vecteur normal unitaire à Γ en $\varphi(t)$, c'est-à-dire le vecteur tel que $\left(\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}, N(t)\right)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimer le centre $M(t)$ du cercle osculateur de Γ en $\varphi(t)$ en fonction de $\varphi(t)$, de $N(t)$ et de la courbure $\kappa(t)$.
2. Rappeler l'expression de la courbure $\kappa(t)$, et déterminer les coordonnées de $N(t)$. En déduire les coordonnées de $M(t)$ en fonction de $x(t)$, $y(t)$ et leurs dérivées.
3. La courbe paramétrée par $t \mapsto M(t)$ s'appelle la *développée* de Γ. Montrer que la tangente au point $M(t)$ de la développée est colinéaire à $N(t)$.

Exercice 3 (Des exemples).

1. Soit P la parabole donnée par $\varphi(t) = (t, t^2)$. Calculer sa courbure et montrer que sa developpée est un cusp. À quoi correspond le point singulier ?
2. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse donnée par $\varphi(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, avec $a, b > 0$. Calculer sa courbure et sa développée. Que se passe-t-il si $a = b$? Et si $a > 0$ et $b < 0$?

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4 (Fonction convexe).

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse et convexe. Montrer que la courbure de Γ est positive ou nulle pour l'orientation induite par le paramétrage régulier $t \mapsto (t, f(t))$.

Exercice 5 (Quelques calculs).

Pour les courbes suivantes, calculer la courbure $\kappa(t)$ et le centre $M(t)$ des cercles osculateurs (quand c'est possible).

1. $\varphi(t) = (t, at + b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$.
2. $\varphi(t) = (t, e^t)$.
3. $\varphi(t) = t(\cos(t), \sin(t))$ (spirale arithmétique).
4. $\varphi(t) = a^t(\cos(t), \sin(t))$ avec $a > 0$, $a \neq 1$ (spirale logarithmique) ; que constatez-vous ?

Exercice 6 (Courbure fixée).

1. Soit $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fontion lisse. On fixe $s_0 \in I$ et on note
$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt$$
et
$$\varphi(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t))dt, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t))dt\right).$$
Montrer que φ est un paramétrage par longueur d'arc, et calculer la courbure de la courbe correspondante.

2. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Déterminer une courbe paramétrée sur $]\varepsilon, +\infty[$ dont la courbure est $\kappa(s) = 1/s$.