TD 6 : études locale et globale

Indispensable

Exercice 1 (Étude locale d'une courbe).
Soit C la courbe paramétrée par $\varphi(t) = (t^2, t^4 + t^5)$.

1. Quels sont les points singuliers (c'est-à-dire non-réguliers) de C ? Déterminer leur nature.
2. Quels sont les points pour lesquels la courbure s'annule ? Déterminer la position de C par rapport à sa tangente en ces points.

Exercice 2 (Indicatrice des tangentes).
Soit C une courbe paramétrée par $t \mapsto \varphi(t)$. Soit $T(t)$ (resp. $\kappa(t)$) le vecteur tangent unitaire (resp. la courbure) au point $\varphi(t)$. La courbe paramétrée par $t \mapsto T(t)$ s'appelle l'*indicatrice des tangentes* de C.

1. On note $\theta(t)$ l'angle entre les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $T(t)$. Montrer que $\kappa(t) = \theta'(t)$.
2. *(Cours)* Soit $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Comment obtenir une courbe paramétrée ayant κ pour courbure ?

Exercice 3 (Rigidité globale et existence).
Soit $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le but de l'exercice est de donner une autre démonstration de l'existence et de l'unicité (à isométrie près) d'une courbe ayant κ pour courbure. On rappelle pour cela le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Application lipschitzienne. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est* globalement lipschitzienne en la deuxième variable *si pour tout compact $K \subset I$, il existe une constante $k > 0$ tel que pour tout $(t, x, y) \in K \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant k\|x - y\|$.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et globalement lipschitzienne en la deuxième variable. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le système de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est définie sur I tout entier.

1. On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} T' & = & \kappa N \\ N' & = & -\kappa T \end{array}\right. .$$

   Soit $t_0 \in I$ et $(T_0, N_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Justifier que le système admet une unique solution $T, N : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $T(t_0) = T_0$ et $N(t_0) = N_0$.

2. Soit (T, N) la solution précédente avec condition initiale (T_0, N_0). Quel système différentiel vérifient les fonctions $\langle T, T\rangle$, $\langle N, N\rangle$ et $\langle T, N\rangle$? En supposant que (T_0, N_0) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, montrer que pour tout $t \in I$ la famille $(T(t), N(t))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.
3. *(Existence)* Comment obtenir une courbe paramétrée par longueur d'arc ayant κ pour courbure ?
4. *(Unicité)* Soit $\varphi, \widetilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées par longueur d'arc ayant κ pour courbure. Soit (T, N) et $(\widetilde{T}, \widetilde{N})$ leurs vecteurs tangents et normaux unitaires. Soit $t_0 \in I$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie qui envoie $\varphi(t_0)$ sur $\widetilde{\varphi}(t_0)$ et $(T(t_0), N(t_0))$ sur $(\widetilde{T}(t_0), \widetilde{N}(t_0))$. Montrer que $\widetilde{\varphi} = f \circ \varphi$.

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4.

Soit C une courbe paramétrée. On suppose que toutes les normales à C passent par un même point. Montrer que C est incluse dans un cercle.

Exercice 5 (Courbure fixée).

Soit $0 < \varepsilon < 1$. Déterminer une courbe paramétrée sur $]\varepsilon, +\infty[$ dont la courbure est $\kappa(s) = 1/s$.

Exercice 6.

Soit C une courbe paramétrée par longueur d'arc $s \mapsto \varphi(s)$. On suppose que $s \mapsto \|\varphi(s)\|$ est maximal en s_0. Montrer que $|\kappa(s_0)| \geqslant \dfrac{1}{\|\varphi(s_0)\|}$.