TD 7 : courbes gauches

Cours

Exercice 1.

1. Que dire d'une courbe gauche dont la courbure est nulle ?
2. Que dire de la torsion d'une courbe plane ?
3. On suppose qu'on connaît le vecteur binormal $s \mapsto B(s)$ d'une courbe gauche, et qu'on sait que la torsion τ de la courbe ne s'annule pas. Montrer que l'on peut déterminer la courbure κ et la valeur absolue $|\tau|$ de la torsion de la courbe.

Indispensable

Exercice 2 (Hélice circulaire).

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ et H l'hélice paramétrée par φ .

1. Déterminer le repère de Frenet de H .
2. Calculer la courbure $\kappa(t)$ et la torsion $\tau(t)$ au point $\varphi(t)$ de l'hélice. Montrer que le rapport κ/τ est constant, et préciser sa valeur.
3. Montrer que l'angle entre les tangentes à H et l'axe $x = y = 0$ est constant, et préciser sa valeur.

Exercice 3 (Torsion et planarité d'une courbe).

Soit C la courbe paramétrée par

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t > 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0 \end{cases} .$$

1. Montrer que C est régulière.
2. Déterminer les points de C où la courbure s'annule.
3. Justifier que la torsion de C est identiquement nulle. Peut-on en déduire que C est plane ?

Pour s'entraîner (facultatif)

Exercice 4.

Soit C une courbe régulière paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Soit π la projection orthogonale sur le plan osculateur de C en $\varphi(t)$ (on rappelle que le plan osculateur est le plan passant par $\varphi(t)$ et engendré par $T(t)$ et $N(t)$). Montrer que la courbure $\kappa_{\pi(C)}(t)$ en t de la courbe plane $\pi(C)$ paramétrée par $\pi \circ \varphi$ est égale à la courbure $\kappa_C(t)$ en t de C .

Exercice 5 (Hélice généralisée).

Une *hélice (généralisée)* est une courbe gauche régulière dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixée, appelée *axe* de l'hélice. Soit C une courbe gauche régulière paramétrée par $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et dont la courbure κ et la torsion τ ne s'annulent pas. Le but est de montrer que C est une hélice si et seulement si κ/τ est constante.

1. On suppose que C est une hélice. Soit u un vecteur directeur unitaire de l'axe de l'hélice.
 - (a) Montrer que les vecteurs normaux $N(t)$ sont orthogonaux à l'axe de l'hélice. En déduire les coordonnées de u dans la base formée par le repère de Frenet de C .
 - (b) Montrer que $\langle -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t), u \rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que κ/τ est constante, et donner sa valeur.
2. On suppose que κ/τ est constante. Déterminer un angle θ et un vecteur unitaire u tel que les tangentes à C fassent un angle θ avec l'axe dirigé par u .
3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(t) = e^t(\cos(t), \sin(t), 1)$ et C la courbe paramétrée par φ . Montrer de deux façons différentes que C est une hélice généralisée.
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(t) = t(\cos(t), \sin(t), 1)$ et C la courbe paramétrée par φ . La courbe C est-elle une hélice généralisée ?