Définitions de géométrie différentielle

1 Définitions générales

Immersion. Application lisse $f : U \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $p \in U$, la différentielle df_p est injective (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$).

Submersion. Application lisse $f : U \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $p \in U$, la différentielle df_p est surjective (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$).

Plongement. Immersion qui est un homéomorphisme sur son image.

2 Courbes

Courbe paramétrée. Application lisse $f : I \to \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On parle aussi de *paramétrisation d'une courbe.*

Courbe paramétrée immergée. Courbe paramétrée qui est une immersion. La condition est que pour tout $p \in I$, la différentielle df_p est non-nulle, c'est-à-dire $f'(p) \neq 0$. On parle aussi de *paramétrisation immergée d'une courbe.*

Courbe paramétrée régulière. Courbe paramétrée qui est un plongement. On parle aussi de *paramétrisation régulière d'une courbe.*

Courbe géométrique Sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut être localement présenté comme l'image d'une paramétrisation régulière.

Courbe régulière. Courbe géométrique (si on parle de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$), ou courbe paramétrée régulière (si on parle de courbes paramétrées).

Courbe. Classe d'équivalence de courbes paramétrées à changement admissible de paramétrisation près. En particulier, c'est toujours l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$. *(On utilisera rarement ce terme tout seul.)*

3 Surfaces

Nappe/surface paramétrée. Application lisse $f : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On parle aussi de *paramétrisation d'une surface.*

Nappe/surface paramétrée immergée. Nappe paramétrée qui est une immersion. La condition est que pour tout $p \in U$, la différentielle df_p est de rang 2. On parle aussi de *paramétrisation immergée d'une surface.*

Nappe/surface paramétrée régulière. Nappe paramétrée qui est un plongement. On parle aussi de *paramétrisation régulière d'une surface.*

Surface géométrique. Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui peut être localement présenté comme l'image d'une nappe régulière.

Surface régulière. Surface géométrique (si on parle de sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$), ou nappe paramétrée régulière (si on parle de nappes paramétrées).

Surface. Classe d'équivalence de nappes paramétrées à changement admissible de paramétrisation près. En particulier, c'est toujours l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$. *(On utilisera rarement ce terme tout seul.)*

4 Vocabulaire additionnel

Point régulier, valeur régulière (d'une paramétrisation). Un point régulier d'une paramétrisation f est un élément $p \in I$ ou $p \in U$ tel que f est une immersion locale autour de p (c'est-à-dire df_p est injective). Une valeur régulière est un élément de l'image de la paramétrisation dont tous les antécédents sont des points réguliers.

Point singulier, valeur singulière (d'une paramétrisation). Point qui n'est pas régulier, valeur qui n'est pas régulière.

Point régulier (d'une courbe ou d'une surface). Point d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une présentation locale comme image d'une paramétrisation régulière.

Point singulier (d'une courbe ou d'une surface). Point qui n'est pas régulier.

Point multiple, point d'auto-intersection (d'une courbe ou d'une surface). Pour une courbe ou nappe paramétrée, point dont la pré-image par la paramétrisation est de cardinal au moins 2. On parle de point *double*, *triple*, etc... si la pré-image est de cardinal 2, 3, etc...

Courbe/surface orientée. Sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ localement présenté comme image d'une famille de paramétrisations régulières telles que pour toutes paramétrisations $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^n$ dans cette famille, le changement de paramétrisations sur la partie commune $f(U) \cap g(V)$ préserve l'orientation, c'est-à-dire a un déterminant jacobien strictement positif en tout point.

(Le changement de paramétrisations sur la partie commune $f(U) \cap g(V)$ est l'application $\alpha : f^{-1}(f(U) \cap g(V)) \to g^{-1}(f(U) \cap g(V))$ telle que $f = g \circ \alpha$ sur $f^{-1}(f(U) \cap g(V))$.)