Sur la g-conjecture

Hanine Awada, Gurvan Mével, Matthieu Piquerez

Table des matières

Introduction

En 1971, McMullen a énoncé une conjecture censée caractériser entièrement le nombre de faces que peut posséder un polytope simple. Dix ans plus tard, Stanley termine la démonstration du théorème en associant à chaque polytope une variété complexe et en utilisant la théorie de Hodge qui décrit l'anneau de Chow de cette variété. C'est le point de départ de la théorie de Hodge combinatoire.

Voici une prise de notes, issue du groupe de travail sur la théorie de Hodge combinatoire et tropicale à Nantes en 2022, expliquant cette preuve du g-théorème.

1 Polyèdres et éventails

Réseaux. On note N un réseau. Son réseau dual est $M = N^\vee = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(N, \mathbb{Z})$. (Après le choix d'une base, on a $N \simeq \mathbb{Z}^n$). On note $N_\mathbb{R} = N \otimes \mathbb{R}$ et $M_\mathbb{R} = M \otimes \mathbb{R}$ ($M_\mathbb{R}$ constitue les formes linéaires sur $N_\mathbb{R}$).

Polyèdre. Un **polyèdre** Q est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces affines fermés :

$$Q = \bigcap_{i=1}^{k} {H_{\ell_i}}^+ \subset M_{\mathbb{R}},$$

où ${H_{\ell_i}}^+ = \{\ell_i \geqslant 0\}$ et $(\ell_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont des formes affines sur $M_{\mathbb{R}}$.
Pour une forme affine ℓ, on note l'hyperplan

$$H_\ell = \{\ell = 0\}.$$

On dit que P est une **face** du polyèdre Q (on note $P \prec Q$) si P est soit $\varnothing$, soit Q, soit $Q \cap H_\ell$ lorsque $Q \subset H_\ell^+$.
On note $M_{Q,\mathbb{R}} = \{\lambda(x-y),\ \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in Q\}$ l'espace tangent de Q, ainsi que $M_Q = M_{Q,\mathbb{R}} \cap M$. (On note également $M_{\mathbb{R}}^Q = M_{\mathbb{R}}/M_{Q,\mathbb{R}}$.)
On supposera les polyèdres strictement convexes, i.e. ne contiennent pas d'espaces affines de dimension strictement positive.
Un **polytope** est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de point.
Un théorème énonce que les polyèdres bornés sont exactement les polytopes.

Remarque. En dimension 1, un polyèdre strictement convexe et soit un segment soit une demi-droite. Pour les polytopes, en dimension 1 ce sont les segments, en dimension 2, on parle de polygones.

Un polyèdre Q de dimension n est dit **simple** si tout sommet de Q appartient à exactement n faces de codimension 1 ce qui équivaut à dire que chaque sommet est incident à n arêtes (voir figures 1a et 1b).

(a) Un cube est simple

(b) Un polyèdre non simple

FIGURE 1 – Polyèdre simple ou non

Un **cône** est un polyèdre dont le seul sommet est 0 ($\Leftrightarrow$ stable par multiplication par $\lambda > 0$).

Complexe polyédral. C'est un ensemble X de polyèdres (appelés "faces") tel que

— pour tout $P \in X$ et toute face $Q \prec P$, on a $Q \in X$;
— pour tout $P, Q \in X$, $P \cap Q$ (peut être vide) est une face commune de P et Q.

(a) Complexe polyédral (b) Non complexe polyédral

FIGURE 2

Exemple. — La figure 2a est un complexe polyédral formé d'un carré, d'un triangle qui partage un côté avec le carré, de leurs arêtes et sommets ainsi qu'un point isolé.
Par contre, la figure 2b formée d'un carré avec ses arêtes et sommets ainsi qu'un segment avec ces sommets n'est pas un complexe polyédral.
— Une sous-variété tropicale de $\mathbb{R}^n$ est le support d'un complexe polyédral satisfaisant une certaine condition d'équilibre.

Une **facette** d'un complexe polyédral X est une face maximale pour l'inclusion. On dit que X est de **dimension pure** égale à d si toutes ses facettes sont de dimension d.

Éventail. Un **éventail** Σ est un complexe polyédral dont tous les polyèdres sont des cônes. Par convention, $\varnothing$ n'est pas considéré comme une face d'un éventail. La face $\{0\}$ joue un rôle analogue dans ce cas.

On note Σ_k l'ensemble des cônes de dimension k d'un éventail Σ. Un cône σ de dimension k d'un éventail Σ est déterminé par les éléments de Σ_1, appelés **rayons**.

Un éventail est **rationnel** si tous ses rayons ont une pente rationnelle, c'est-à-dire si chaque rayon admet un vecteur directeur dans le réseau N.

Soit $\sigma \in \Sigma$ un cône rationnel et $\rho_1, ..., \rho_k$ les rayons de σ. On note $e_i = e_{\rho_i}$ le vecteur primitif de ρ_i. On dit que le cône σ est **simplicial** si $e_1, ..., e_k$ sont linéairement indépendants c'est-à-dire σ est de la forme $\mathbb{R}_+ e_1 + ... + \mathbb{R}_+ e_k$, avec $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ indépendants. Il est **unimodulaire** si $(e_1, ..., e_k)$ forment une base de l'espace tangent $N_{\sigma,\mathbb{R}}$.

Un éventail Σ est dit simplicial si tous ses cônes σ sont simpliciaux, et unimodulaire si tous ses cônes σ sont unimodulaires.

Le support d'un éventail Σ, noté $|\Sigma|$, correspond à $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$. Un éventail Σ est dit **complet** si $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_{\mathbb{R}}$.

Soit $Q \subset M_{\mathbb{R}}$ un polyèdre de dimension (pure) n tel que $0 \in \mathring{Q}$. Pour $\ell \in N_{\mathbb{R}}$ on note $Q_\ell = \{x \in Q \mid \ell(x) = \max_Q \ell\}$; et pour $P \prec Q$ on note $\sigma_P = \{\ell \in N_{\mathbb{R}} \mid Q_\ell = P\}$.

L'**éventail normal** ou **éventail dual** de Q est l'éventail formé des cônes σ_P pour $P \prec Q$ (voir figure 3).

Remarque. Un polyèdre et son éventail vivent dans des espaces duaux. En choisissant des bases pour les réseaux M et N, on peut éventuellement tout identifier à $\mathbb{R}^n$ pour représenter les objets sur le même dessin.

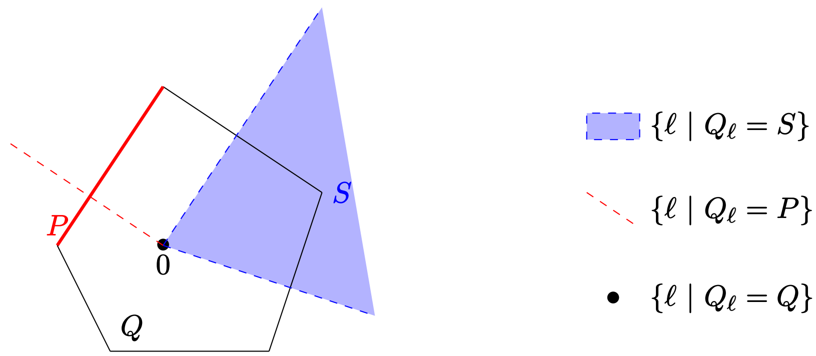


FIGURE 3 – Éventail normal

Remarque. Un polyèdre Q est simple si son éventail normal est simplicial.

2 La g-conjecture

2.1 Présentation

Soit $Q \subset M_{\mathbb{R}}$ un polytope (= enveloppe convexe d'un nombre fini de points) simple de dimension n. On note f_k son nombre de faces de dimension k. Le f-vecteur de Q est $(f_0, \ldots, f_n)$.

Question. Caractériser les f-vecteurs possibles.

Le f-polynôme est $F(X) = \sum_{k=0}^{n} f_k X^k$; le h-polynôme est $H(X) = F(X-1) = \sum_{k=0}^{n} h_k X^k$; le h-vecteur est $(h_0, \ldots, h_n)$.

Théorème 2.1 (g-théorème). Les propriétés suivantes caractérisent les f-vecteurs (les propriétés 4 et 6 impliquent les autres) :

1. $h_0 = 1$ (caractéristique d'Euler-Poincaré)
2. $h_n = 1$
3. $h_k \geqslant 0$ pour tout k
4. Dehn-Sommerville : $h_{n-k} = h_k$ ($\sim$ dualité de Poincaré)
5. $g_k = h_k - h_{k-1} \geqslant 0$ pour $k \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$,
6. le g-vecteur est un M-vecteur (voir définition suivante).

Les propriétés 4 et 5 impliquent que (h_k) est unimodale, c'est-à-dire croissante puis décroissante.

Définition 2.2. Un M-vecteur est un vecteur de la forme $(\dim(A^0), ..., \dim(A^d))$ où $A^\bullet$ est une $\mathbb{K}$-algèbre graduée avec

— $A^k = 0$ si $k < 0$ ou $k > d$,

— $A^0 \simeq \mathbb{K}$,

— $\dim(A^1) < +\infty$,

— $A^\bullet$ est engendrée par A^1.

Concrètement, on pense à un anneau de polynômes quotienté par des polynômes homogènes (voir définition 2.3).

Démonstration (de Dehn-Sommerville). On imagine tout dans $\mathbb{R}^n$ (et dessin avec $n = 3$). On place le polyèdre dans l'espace dans une position générique de telle sorte que, pour un certain axe de $\mathbb{R}^n$, tous les sommets de Q aient une coordonnée différente.

On imagine ensuite de l'eau qui monte (pour $n = 3$, voir Figure 4), c'est-à-dire un demi-espace que l'on translate peu à peu le long de l'axe que l'on s'est fixé. Ce demi-espace rencontre les sommets de Q un par un, et englobe peu à peu l'ensemble des faces de Q. On dit qu'un sommet de Q est de type k si, quand l'eau atteint ce sommet, la face de plus grande dimension nouvellement immergée est de dimension k.

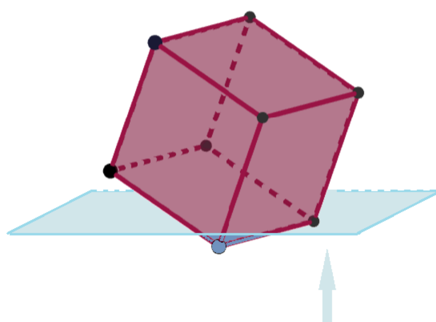


FIGURE 4

Soit $\tilde{h}_k$ le nombre de sommets de Q de type k. Comme Q est simple, en atteignant un sommet de type k l'eau recouvre exactement $\binom{k}{i}$ faces de dimension i, pour $0 \leqslant i \leqslant k$. Ainsi, chaque sommet de type k contribue au f-vecteur de Q de $\left(\binom{k}{0}, ..., \binom{k}{k}, 0, ...0\right)$, c'est-à-dire au f-polynôme de $(X+1)^k$, c'est-à-dire au h-polynôme de X^k. Donc $\tilde{h}_k = h_k$.

En faisant descendre l'eau plutôt que la monter (en translatant le demi-espace dans l'autre sens), on voit que $\tilde{h}_{n-k} = \tilde{h}_k$ (un sommet de type k devient un sommet de type $n-k$). □

2.2 Anneau de Chow

Soit Σ un éventail simplicial rationnel pas forcément complet, c'est-à-dire de support $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ pas nécessairement égal à $N_\mathbb{R}$. Si ρ un rayon (un cône de dimension 1), on note e_ρ son vecteur primitif, c'est-à-dire le générateur de $N \cap \rho \simeq \mathbb{N}$.

Définition 2.3 (Anneau de Chow). L'anneau de Chow de Σ est

$$A^\bullet(\Sigma) = \mathbb{Q}[x_\rho,\ \rho \text{ rayon de } \Sigma]/(I+J)$$

(graduée par le degré), où

$$I = \langle x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k},\ \rho_1, \dots, \rho_k \text{ n'appartiennent pas à une même face} \rangle,$$

$$J = \left\langle x_\ell = \sum_\rho \ell(e_\rho) x_\rho,\ \ell \in M_\mathbb{Q} \right\rangle.$$

Exemple. Identifions M et N à $\mathbb{Z}^2$ et $M_\mathbb{R}$ et $N_\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, une forme linéaire est simplement donnée par le produit scalaire contre un vecteur à coefficients rationnels.

Prenons l'éventail dont les rayons ρ_1, ρ_2 et ρ_3 sont engendrés respectivement par les vecteurs primitifs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et $e_0 = (-1,-1)$ (voir figure 5a).

Alors $A^0(\Sigma) = \mathbb{Q}$.

En prenant ℓ_1 la forme linéaire associée au vecteur $-e_1$, on a $x_{\ell_1} = -x_1 + x_0$, donc $x_0 = x_1$ dans l'anneau de Chow de Σ. De même, avec ℓ_2 la forme linéaire associée à $-e_2$ on obtient $x_0 = x_2$ dans l'anneau de Chow. Si on voit que $x_1 \neq 0$, alors on a $A^1(\Sigma) = \mathbb{Q}x_1$.

Puisque $x_0 = x_1 = x_2$, alors pour tout i, j on a $x_i x_j = x_1^2$, donc (si $x_1^2 \neq 0$) on a $A^2(\Sigma) = \mathbb{Q}x_1^2$.

Enfin, puisque ρ_1, ρ_2 et ρ_3 ne forment pas un cône, alors $x_0 x_1 x_2 = 0$. Donc $A^k(\Sigma) = 0$ pour $k \geqslant 3$.

Remarque. L'exemple précédent se généralise : l'anneau de Chow du dual du simplexe dans $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]/\langle X^{n+1} \rangle$.

FIGURE 5

Exemple. Prenons l'éventail dont les rayons sont engendrés par les vecteurs primitifs e_1, e_2, $e_3 = -e_1$ et $e_4 = -e_2$ (voir Figure 5b). Alors $A^0(\Sigma) = \mathbb{Q}$.

En prenant la forme linéaire associée au vecteur e_1, on a $x_1 = x_3$. Avec celle associée à e_2 on

a $x_2 = x_4$. Si on voit que $x_1 \neq x_2$ alors $A^1(\Sigma) = \mathbb{Q}x_1 \oplus \mathbb{Q}x_2$.
Comme ρ_1 et ρ_3 ne forment pas un cône, on a $x_1x_3 = 0$; de même $x_2x_4 = 0$. On a donc aussi $x_1^2 = x_3^2 = 0$ et $x_2^2 = x_4^2 = 0$. Enfin, $x_1x_2 = x_3x_2 = x_3x_4 = x_1x_4$, donc $A^2(\Sigma) = \mathbb{Q}x_1x_2$.
Enfin, on voit que $A^k(\Sigma) = 0$ pour $k \geqslant 3$.

Notation. Si σ est un cône de Σ, on note $x_\sigma = \displaystyle\prod_{\rho \text{ rayon de } \sigma} x_\rho$.

Définition 2.4. Si $B^\bullet$ est une algèbre graduée, son polynôme de Hilbert est

$$\mathcal{H}(B^\bullet) = \sum_k \dim(B^k) X^k.$$

La même définition peut être donnée pour un idéal homogène.

Lemme de localisation pour $A^\bullet(\Sigma)$.

Théorème 2.5. Si Σ est simplicial et rationnel, on a une suite exacte pour tout k :

$$\bigoplus_{\tau \in \Sigma_{k-1}} M_{\tau,\mathbb{Q}}^\perp \to \mathbb{Q}[x_\sigma,\ \sigma \in \Sigma_k] \twoheadrightarrow A^k(\Sigma) \to 0.$$

Ici, $M_{\tau,\mathbb{Q}}^\perp$ est l'ensemble des formes linéaires nulles sur τ. La première flèche est donnée par

$$\ell \in M_{\tau,\mathbb{Q}}^\perp \mapsto \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ \tau \prec \sigma}} \ell(e_{\sigma/\tau}) x_\sigma = x_\ell x_\tau \mod I$$

où $e_{\sigma/\tau} := e_\rho$ où ρ est le vecteur primitif de l'unique (ok car éventail simplicial) rayon de σ qui n'est pas dans τ.

Remarque. On a $x_\ell x_\tau = \displaystyle\sum_{\rho \prec \tau} \ell(e_\rho) x_\rho x_\tau + \sum_{\substack{\rho \\ (\tau+\rho) \in \Sigma_k}} \ell(e_\rho) x_\rho x_\tau + \sum_{\substack{\rho \\ (\tau+\rho) \notin \Sigma}} \ell(e_\rho) x_\rho x_\tau$ (soit ρ est un rayon de τ, soit ρ et τ engendrent un cône de dimension k, soit ρ et τ n'engendrent pas un cône de Σ ; voir figure 6). La première somme est nulle si $\ell \in M_{\tau,\mathbb{Q}}^\perp$; et la troisième est nulle modulo I (ρ et les rayons de τ forment une "non-face"). La deuxième somme se réécrit $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_k \\ \tau \prec \sigma}} \ell(e_{\sigma/\tau}) x_\sigma$. Cela justifie la formule modulo I pour la première flèche.

L'exactitude à droite dans ce théorème dit que l'anneau de Chow est engendré (comme espace vectoriel) par les monômes sans carrés.

Démonstration (de l'exactitude à droite). Soit $y = \sum a(x_1, ..., x_k) x_{\rho_1}^{\alpha_1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k} \in A^k(\Sigma)$. On veut montrer qu'on peut prendre $\alpha_i = 1$, en remplaçant (par exemple si $\alpha_1 > 1$) $x_{\rho_1}^{\alpha_1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k}$ par une somme de termes $x_{\rho_1}^{\alpha_1 - 1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k} x_{\rho_{k+1}}$ modulo $I + J$, puis en faisant une sorte de "récurrence sur l'ordre lexicographique".

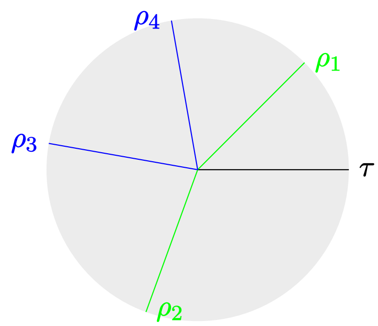


FIGURE 6 – ρ_1 (ρ_2 également) engendre avec τ une face de dimension k de Σ ; ρ_3 (ρ_4 également) n'engendre avec τ aucune face de Σ.

On suppose $\rho_1, ..., \rho_k$ distincts et $\rho_1 + ... + \rho_k = \sigma \in \Sigma$. Comme σ est simplicial, alors il existe $\ell \in M$ telle que $\ell(\rho_1) = 1$ et $\ell(\rho_i) = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant k$ (on note $\ell(\rho_i)$ au lieu de $\ell(e_{\rho_i})$). Ainsi, puisque $x_\ell \in J$ on a modulo $I + J$:

$$0 = x_\ell x_{\rho_1}^{\alpha_1 - 1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k} = x_{\rho_1}^{\alpha_1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k} + \sum_{\rho \neq \rho_1, ..., \rho_k} \ell(\rho) x_{\rho_1}^{\alpha_1 - 1} ... x_{\rho_k}^{\alpha_k}$$

d'où le résultat. □

Définition 2.6. Pour un éventail complet, un effeuillage est un ordre $\eta_0, \ldots, \eta_k$ sur les facettes tel que pour tout i, $\eta_i \cap \bigcup_{0 \leqslant j < i} \eta_j$ est une union de faces de codimension 1.

Théorème 2.7. Un effeuillage pour un éventail Σ complet de dimension d donne un système de générateurs (en tant qu'espace vectoriel) de $A^\bullet(\Sigma)$.

Démonstration. On place à nouveau le polyèdre en position générique, et on translate un demi-espace (on fait monter l'eau). En atteignant le sommet i, on ajoute une unique face F_i de dimension maximale d_i. Le cône dual de F_i est de dimension $d - d_i$ et est noté σ_i. Montrons que les x_{σ_i} engendrent $A^\bullet(\Sigma)$.

Plus exactement, montrons que $x_{\sigma_1}, ..., x_{\sigma_i}$ engendrent (entre autres) tous les x_σ où σ est le dual d'une face $F(\sigma)$ située sous le sommet i (c'est-à-dire recouverte par le demi-espace avant le sommet i).

Pour $i = 1$, c'est ok.

Par récurrence, supposons qu'on atteigne un sommet $i \geqslant 2$. L'hypothèse de récurrence dit qu'on a déjà engendré les x_σ où $F(\sigma)$ est sous $i - 1$, notamment on a tous les x_σ pour $F(\sigma)$ une face de $F(\sigma_i)$ qui ne contient pas i, i.e., $\sigma_i \prec \sigma \not\prec \eta_i$. Il reste donc à voir qu'on a engendré en plus les x_σ avec $F(\sigma)$ en dessous de i mais pas de $i-1$, c'est-à-dire $F(\sigma)$ contient le sommet i et est contenue dans F_i. Si η_i est la facette duale du sommet i, la condition sur σ se traduit par

$$\sigma_i \prec \sigma \prec \eta_i.$$

Considérons un tel σ. Si $\sigma = \sigma_i$, c'est bon. Sinon, soit $\rho_1, ..., \rho_{d_i}$ les rayons de η_i qui ne sont pas dans σ_i et supposons par exemple que ρ_1 soit un rayon de σ. Soit $1 \leqslant k \leqslant d_i$ et soit $\ell \in M$ telle que $\ell_{|N_{\sigma_i,\mathbb{R}}} = 0$, $\ell(\rho_1) = 1$ et $\ell(\rho_j) = 0$ pour $j > 1$ (c'est possible car η_i est simplicial). Alors modulo $I + J$ on a

$$0 = x_\ell x_{\sigma_i} = x_{\rho_1} x_{\sigma_i} + \sum_{\substack{\rho \notin \eta_i \\ \sigma_i + \rho \in \Sigma}} \ell(\rho) x_\rho x_{\sigma_i}.$$

Dans la somme, les monômes qui apparaissent correspondent à des cônes $\sigma + \rho$ duaux à des faces situées sous $i - 1$. On a donc montré qu'on pouvait engendré x_σ, d'où le résultat.

On a montré que les x_{σ_i} engendraient l'anneau de Chow, où σ_i est le dual de la face de dimension maximale qu'on obtient quand l'eau arrive au sommet i du polytope. □

Remarque. L'eau qui monte donne un ordre sur les sommets, qui correspond à un cas particulier d'effeuillage. La preuve ci-dessus se généralise directement à tout effeuillage.

Corollaire 2.8. On a $\dim(A^k(\Sigma)) \leqslant h_k$.

Démonstration. En effet, h_k est le nombre de σ_i tel que $d_i = k$ (voir "démonstration de Dehn-Sommerville"), et le théorème précédent montre que les x_{σ_i} sont générateurs. □

Théorème 2.9. On a $\dim(A^k(\Sigma)) = h_k$.

Démonstration. Notons $D^\bullet := \mathbb{Q}[x_\rho | \rho \in \Sigma_1]/I$. Calculons sa série de Hilbert. Soit σ une face de Σ et soit $\rho_1, \ldots, \rho_k$ les rayons de σ. On considère le monôme $x_\sigma x_{\rho_1}^{\alpha_1} \cdots x_{\rho_k}^{\alpha_k} \in D^{k+\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$. On se convainc facilement que les monômes de cette forme forment exactement une base de $D^\bullet$. Moralement, la somme de ces monômes est

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma (1 + x_{\rho_1} + x_{\rho_1}^2 + \cdots) \cdots (1 + x_{\rho_k} + x_{\rho_k}^2 + \cdots) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{x_\sigma}{(1 - x_{\rho_1}) \cdots (1 - x_{\rho_k})}.$$

Donc, cette fois-ci rigoureusement, pour obtenir le polynôme de Hilbert, on remplace les x_ρ par X et on a (pour la dernière égalité, on utilise Dehn-Sommerville)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(D^\bullet) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(\frac{X}{1 - X} \right)^{\dim(\sigma)} \\
&= \sum_k f_{n-k} \left(\frac{X}{1 - X} \right)^k \\
&= \left(\frac{X}{1 - X} \right)^n \sum_k f_k \left(\frac{1 - X}{X} \right)^k \\
&= \left(\frac{X}{1 - X} \right)^n F(X^{-1} - 1) \\
&= \left(\frac{X}{1 - X} \right)^n H(X^{-1})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(D^\bullet) = \frac{1}{(1-X)^n} H(X).$$

Pour toute algèbre graduée $B^\bullet$, si $\ell \in B^1$, on a

$$\mathcal{H}(B^\bullet/(\ell)) = \mathcal{H}(B^\bullet) - \mathcal{H}(\ell \cdot B^\bullet).$$

On considère l'ordre partiel coefficient par coefficient sur $\mathbb{Z}[[X]]$. Clairement, $\mathcal{H}(\ell \cdot B^\bullet) \leqslant X\mathcal{H}(B^\bullet)$ (avec égalité si et seulement si $\cdot\ell$ est injective). Donc,

$$\mathcal{H}(B^\bullet/(\ell)) \geqslant (1-X)\mathcal{H}(B^\bullet).$$

Maintenant on a le lemme facile suivant

Lemme 2.10. Si R, S, T sont trois séries avec $R \geqslant S$ et $T \geqslant 0$ alors $RT \geqslant ST$.

Donc

$$\frac{1}{1-X}\mathcal{H}(B^\bullet/(\ell)) \geqslant \mathcal{H}(B^\bullet).$$

Soit $\ell_1, \ldots, \ell_n$ une base de $M_\mathbb{Q}$. En itérant l'argument ci-dessus à $A^\bullet(\Sigma) = D^\bullet(\Sigma)/(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ (et en utilisant le lemme), on obtient

$$\frac{1}{(1-X)^n}\mathcal{H}(A^\bullet(\Sigma)) \geqslant \mathcal{H}(D^\bullet).$$

Par le corollaire 2.8, $H(X) \geqslant \mathcal{H}(A^\bullet(\Sigma))$. En rassemblant tout, on obtient

$$\frac{1}{(1-X)^n}H(X) \geqslant \frac{1}{(1-X)^n}\mathcal{H}(A^\bullet(\Sigma)) \geqslant \mathcal{H}(D^\bullet) = \frac{1}{(1-X)^n}H(X).$$

Donc on a égalité partout et $\mathcal{H}(A^\bullet(\Sigma)) = H(X)$, ce qui conclut. □

Remarque. On obtient au passage que n'importe quelle base de formes linéaires $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ forme une suite régulière dans $D^\bullet$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l_i ne divise pas 0 dans

$$D^\bullet/(l_1, \ldots, l_{i-1}).$$

2.3 Propriétés kählériennes

Soit $B^\bullet$ une algèbre graduée commutative avec $B^k = 0$ sauf si $0 \leqslant k \leqslant d$. On suppose aussi qu'on a :

$$\deg : B^d \to \mathbb{K}.$$

Définition 2.11 (PD). On dit que $B^\bullet$ vérifie la dualité de Poincaré (PD) si pour tout k,

$$\begin{array}{ccccc} B^k \otimes B^{d-k} & \to & B^d & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & a.b & \mapsto & \deg(a.b) \end{array}.$$

est un appariement parfait c'est-à-dire que $B^k \simeq (B^{d-k})^*$

Définition 2.12 (HL). Pour une $B^\bullet$ qui vérifie PD, on dit que $B^\bullet$ vérifie Lefschetz-difficile (HL) pour un élément $L \in B^1$ si pour tout $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$, on a un isomorphisme

$$B^k \xrightarrow{\cdot L^{d-2k}} B^{d-k},$$

avec $\cdot L : B^\bullet \to B^{\bullet+1}$ opérateur de Lefschetz.

Si l'algèbre $B^\bullet$ vérifie HL pour un élément L alors on gagne beaucoup de structure (voir figure 7).

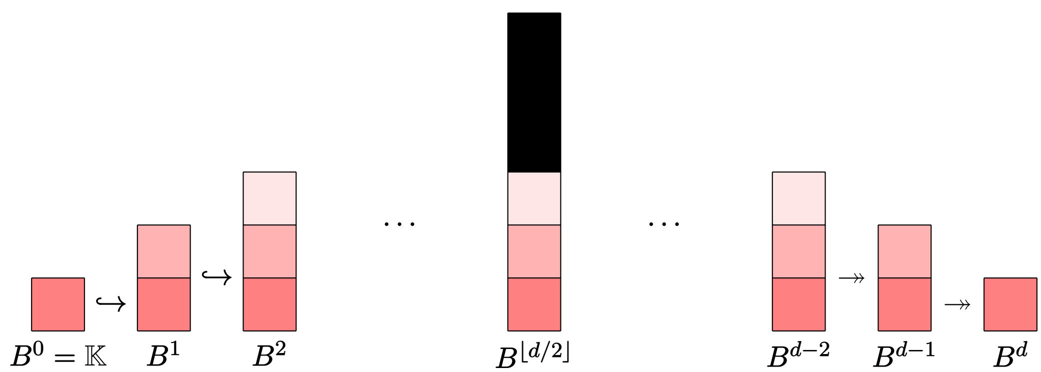


Figure 7

On définit P^k la partie primitive de degré k :

$$P^k := \ker(L^{d-2k+1} : B^k \to B^{d-k+1})$$

Proposition 2.13. Si $B^\bullet$ vérifie HL pour un élément L (et donc $B^\bullet$ PD), alors on a

$$B^k := \bigoplus_{i=0}^{k} L^{k-i} P^i,$$

pour $k \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$.

De plus, L induit une forme bilinéaire pour $k \leqslant \left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor$:

$$\langle .,. \rangle_L \left| \begin{array}{ccc} B^k \otimes B^k & \to & \mathbb{K} \\ a \otimes b & \mapsto & \deg(aL^{d-2k}b) \end{array} \right. .$$

Proposition 2.14. Si $B^\bullet$ vérifie HL pour un élément L, alors la forme bilinéaire induite par L, $\langle .,. \rangle_L$, est non dégénérée par HL et PD.

Proposition 2.15. Si $B^\bullet$ vérifie HL pour un élément L, alors on a $P^k = (L.B^{k-1})^\perp$ pour $\langle .,. \rangle_L$ et la décomposition dans la proposition 2.13 est orthogonale.

Notamment, pour $k \leqslant \left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor$, on a $\dim(B^k) - \dim(B^{k-1}) \geqslant 0$. Encore mieux, on a :

$$\begin{aligned} \dim(B^k) - \dim(B^{k-1}) &= \dim(C^k) \\ &= \dim(B^k/L.B^{k-1}) \end{aligned}$$

où $C^\bullet = B^\bullet/(L)$ et $C^k = 0$ pour $k > \left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor$.

Corollaire 2.16. Si l'anneau de Chow $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie HL pour un élément quelconque de $A^1(\Sigma)$, alors $g_i = \dim(A^k(\Sigma)) - \dim(A^{k-1}(\Sigma)) \geqslant 0$ est un M-vecteur.

Démonstration. Par HL, on a l'injectivité $\cdot L : A^k(\Sigma) \to A^{k+1}(\Sigma)$ pour $k < n/2$ et la surjectivité pour $k \geqslant n/2$. On en déduit que

$$\mathcal{H}(A^\bullet(\Sigma)/(L)) = G(X) := \sum_k g_k X^k.$$

Donc, (g_k) est un M-vecteur. □

Remarque. Ceci conclut la g-conjecture (voir théorème 2.1) si l'anneau de Chow vérifie HL pour au moins un élément (on va le montrer pour Σ l'éventail dual d'un polytope simple unimodulaire).

Définition 2.17 (HR). Si $B^\bullet$ vérifie HL, on dit qu'elle vérifie les relations bilinéaires de Hodge-Riemann (HR) pour un L si $(-1)^k\langle .,. \rangle_L$ est définie positive sur P^k.

Proposition 2.18. Soit C un sous-ensemble connexe de B^1 tel que pour tout $L \in C$, $B^\bullet$ vérifie HL pour L. Si de plus il existe $L \in C$ tel que $B^\bullet$ vérifie HR pour L, alors tout $L \in C$ vérifie HR.

Démonstration (Idée de preuve). On peut montrer facilement que HR pour L est équivalent à ce que la signature de $\langle ., . \rangle_L$ soit $(+, \dots, +, - \dots, -)$ avec $\sum_{\substack{i \leqslant k \\ i \text{ impair}}} \dim(B^i) - \dim(B^{i-1})$ signes $-$ sur B^k pour tout $k \leqslant d/2$. Comme HL implique que $\langle ., . \rangle_{L'}$ est non-dégénérée pour L' dans C, la signature de la forme bilinéaire ne peut pas changer sur C, ce qui conclut. □

Exemple. Soit Z une variété complexe non singulière projective (compacte) de dimension d, avec la cohomologie de de Rham $H^0(Z), ..., H^{2d}(Z)$. Alors $H^{2\bullet}(Z)$ vérifie PD, HL et HR.

2.4 Éléments positifs dans $A^1(\Sigma)$

On note $\mathscr{L}^{pm}(\Sigma)$ l'ensemble des fonctions sur Σ linéaires par cônes. On a une application

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{pm}(\Sigma) & \rightarrow & A^1(\Sigma) \\ f & \mapsto & \sum_\rho f(e_\rho) x_\rho \end{cases}$$

dont le noyau est formé des formes linéaires (par définition de l'idéal J).

Définition 2.19. On dit que $f \in \mathscr{L}^{pm}(\Sigma)$ est (strictement) convexe pour Σ si pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $\ell \in M_{\mathbb{R}}$ telle que $f - \ell$ est nulle sur σ et (strictement) positive sur $\eta \setminus \sigma$ pour $\eta \succ \sigma$, c'est-à-dire sur les $\rho \in \Sigma_1$ tels que $\rho \not\prec \sigma$ et $\sigma + \rho \in \Sigma$.

Remarque. Dans le cas où Σ est complet, $f \in \mathscr{L}^{pm}$ est convexe si et seulement si f est convexe au sens classique.

Exemple. Soit Σ l'éventail dual du simplexe standard de dimension 2. On considère la fonction f définie sur la figure 8. Alors f est strictement convexe. En effet, pour ρ_1 (respectivement ρ_2 et ρ_3) on peut prendre $\ell(x, y) = x - \dfrac{y}{2}$ (respectivement $\ell(x, y) = 0$). Pour les cônes σ de dimension 2, on prend $\ell_{|\sigma} = f_{|\sigma}$ et on étend ℓ par linéarité.

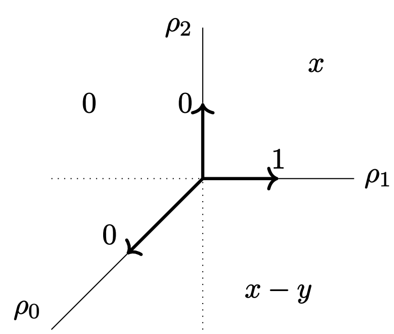


FIGURE 8 – Une fonction f strictement convexe

Définition 2.20 (Élément ample/positif). Si f est strictement convexe, on dit que l'image de f dans $A^1(\Sigma)$ est ample (ou positif). L'ensemble de ces éléments est un cône ouvert convexe de $A^1(\Sigma)$, qu'on note $\mathscr{K}^+(\Sigma)$. Son adhérence est notée $\mathscr{K}(\Sigma)$, et ses éléments sont appelés éléments nefs (cela correspond aux fonctions linéaires par cônes convexes).
On dit que Σ est quasi-projectif si $\mathscr{K}^+(\Sigma) \neq \varnothing$. On dit que Σ est projectif s'il est quasi-projectif et s'il est complet.

Un éventail est projectif si et seulement s'il est l'éventail normal d'un polytope ; de plus, les éléments de $\mathscr{K}^+(\Sigma)$ correspondent aux polytopes Q dont Σ est l'éventail normal. En effet, si $Q \subset M_{\mathbb{R}}$ est un tel polytope et si $x \in N_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}}^{\vee}$, on pose $f(x) = \max_{\ell \in Q} \ell(x)$. On peut vérifier que f est bien dans $\mathscr{K}^+(\Sigma)$. Réciproquement, si $f \in \mathscr{K}^+(\Sigma)$, on pose $Q = \{\ell \mid \ell \leqslant f\}$ et on peut vérifier que Σ est l'éventail dual de Q.
On rappelle qu'on a une application deg : $A^d(\Sigma) \to \mathbb{K}$.

Théorème 2.21 ($\sim$ Kouchnirenko). Soit $\alpha \in \mathscr{K}^+(\Sigma)$ et Q le polytope dual de Σ associé à α. Alors
$$\frac{1}{d!}\deg(\alpha^d) = \mathrm{Vol}(Q),$$
où Vol désigne le volume euclidien de Q (i.e.,pour la mesure de Lebesgue).

Remarque. C'est en lien avec le théorème de Kouchnirenko qui apparaît plus loin.

3 Variétés toriques

3.1 Polygone, plongement et variété torique

Le plongement de Veronese de degré d est

$$\varphi_d \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^n & \to & \mathbb{CP}^{\mathcal{N}} \\ [x] = [x_0 : \ldots : x_n] & \mapsto & [x^I]_{I \in \mathcal{I}} \end{array} \right.$$

où $\mathcal{I} = \{(i_0, \ldots, i_n) | i_0 + \cdots + i_n = d\}$, et $\mathcal{N} = \binom{n+d}{d} - 1$. Cette application amène à considérer le polyèdre
$$\Delta_{n,d} = \mathrm{Conv}(\mathcal{I}) \simeq \mathrm{Conv}(\{(i_1, \ldots, i_n) | (i_0, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}\}).$$

Exemple. Voir Figure 9, l'enveloppe convexe $\Delta_{2,3}$.

Cette situation est un cas particulier de la situation suivante.
Soit X une variété algébrique et D un diviseur de X. On considère

$$\mathscr{L}(D) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{C} \text{ application rationnelle} \mid \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\}.$$

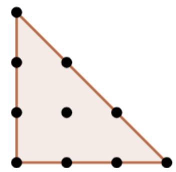


FIGURE 9 – Polygone de Newton de l'image du plongement de Veronese de degré 3 pour $n = 2$.

Soit $h^0(D) = \dim(\mathscr{L}(D))$ et $(f_1, \ldots, f_{h^0(D)})$ une base de $\mathscr{L}(D)$. On considère l'application

$$\varphi_D \left| \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{CP}^{h^0(D)-1} \\ p & \mapsto & [f_i(p)]_{1 \leqslant i \leqslant h^0(D)} \end{array} \right. .$$

Cette application n'est bien définie que si les f_i n'ont aucun zéro commun. Dans ce cas, on dit que D est très ample si φ_D est un plongement ; et ample s'il existe $m \geqslant 1$ tel que mD est très ample.

Exemple. Soit $X = \mathbb{CP}^n$ et D une hypersurface de degré d c'est-à-dire $D = \{P(x) = 0\}$ pour P un polynôme homogène de degré d. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(D) & = & \{f : \mathbb{CP}^n \dashrightarrow \mathbb{C} \mid \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\} \\ & = & \left\{\dfrac{Q}{R} \mid Q \text{ et } R \text{ homogènes de même degré, } \mathrm{div}(Q) - \mathrm{div}(R) + D \geqslant 0\right\} \\ & \simeq & \{R \mid V(R) \subset D\} \\ & = & \{R \mid R \text{ divise } P\} \\ & \simeq & \left\{\dfrac{Q'}{P},\ Q' \in \mathbb{C}_d[x_0, \ldots, x_n]\right\} \\ & \simeq & \mathbb{C}_d[x_0, \ldots, x_n] \end{array}$$

et avec $\mathcal{N} = \binom{n+d}{d} - 1$, l'application φ_D est le plongement de Veronese

$$\varphi_D \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^n & \to & \mathbb{CP}^{\mathcal{N}} \\ [x] & \mapsto & \left[\dfrac{x^i}{P(x)}\right]_{\{i \ \mid \ \sum i_j = d\}} = [x^i]_{\{i \ \mid \ \sum i_j = d\}} \end{array} \right. .$$

Remarque. On peut voir φ_D de façon plus intrinsèque :

$$\varphi_D \left| \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{P}(\mathscr{L}(D)^\vee) \\ p & \mapsto & \{f \in \mathscr{L}(D) \mid f(p) = 0\} \end{array} \right. .$$

Le point p étant fixé, la condition $f(p) = 0$ est linéaire en les coefficients de f. Ainsi, $\varphi_D(p)$ est un hyperplan de $\mathscr{L}(D)$, ce qui correspond à une droite de $\mathscr{L}(D)^\vee$.

Définition 3.1. Une variété torique est une variété algébrique munie de l'action d'un tore $(\mathbb{C}^*)^n$ dont l'une des orbites est dense.

Exemple. Considérons $\Delta \in \mathbb{R}^n$ un polyèdre convexe à sommets entiers. Soit $\mathcal{N} = |\Delta \cap \mathbb{Z}^n| - 1$ et

$$\varphi_\Delta \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \to & \mathbb{CP}^{\mathcal{N}} \\ x & \mapsto & [x^I]_{I \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} \end{array} \right. .$$

Alors $X_\Delta := \overline{\mathrm{Im}(\varphi_\Delta)}$ est une variété torique. En particulier, pour $\Delta = \Delta_{n,d}$ on trouve $\mathbb{CP}^n$. Dans la suite, on note X_Δ la variété torique associée à Δ. En particulier, on a les exemples suivants :

Exemple. Pour $n = 2$,

1. Soit $\Delta_{2,1}$ le polygone dans la figure 10a ,

$$\varphi_{\Delta_{2,1}} \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^2 & \to & \mathbb{CP}^2 \\ (x,y) & \mapsto & [1 : x : y] \end{array} \right. .$$

   La variété torique associée à $\Delta_{2,1}$ est $X_{\Delta_{2,1}} = \mathbb{CP}^2$.

2. Soit Δ le polygone dans la figure 10b.

$$\varphi_\Delta \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^2 & \to & \mathbb{CP}^3 \\ (x,y) & \mapsto & [1 : x : y : xy] \\ & & X \quad Y \quad Z \quad T \end{array} \right. .$$

   La variété torique associée à Δ est

$$X_\Delta = \{YZ = XT\} \simeq \text{ quadrique dans } \mathbb{CP}^3 \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$$

   (par plongement de Segre).

(a) $\Delta_{2,1}$ (b) Δ

FIGURE 10

Lemme 3.2.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}^n$. Alors $X_{\Delta+a} = X_\Delta$, i.e. X_Δ est invariant par translation.
2. Soit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Alors $X_{u(\Delta)} = X_\Delta$, i.e. X_Δ est invariant par transformations linéaires. (Regarder X_Δ ou $X_{u(\Delta)}$ revient à regarder la même variété dans des cartes différentes.)

Corollaire 3.3. Soit Γ une face de Δ de dimension k. Alors Γ correspond à une $(\mathbb{C}^*)^k$-orbite de X_Δ notée $\mathring{X}_\Gamma$, dont l'adhérence est X_Γ.

(Si $[y_I]_{I \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n}$ sont les coordonnées dans $\mathbb{CP}^{\mathcal{N}}$, alors $\mathring{X}_\Gamma = X_\Delta \cap \left\{ \begin{array}{lll} y_I = 0 & \text{si} & I \notin \Gamma \\ y_I \neq 0 & \text{si} & I \in \Gamma \end{array} \right\}$.)

Démonstration. Par le lemme précédent on peut supposer que $\Gamma = \Delta \cap \{i_n = ... = i_{n-k} = 0\}$ et $\Delta \subset \{i_n \geqslant 0, ..., i_{n-k} \geqslant 0\}$. Dans $\overline{\mathrm{Im}(\varphi_\Delta)}$ on aura

$$\varphi_\Gamma \left| \begin{array}{rcl} (\mathbb{C}^*)^k & \to & \mathbb{CP}^{|\Gamma \cap \mathbb{Z}^n|-1} \subset \mathbb{CP}^{\mathcal{N}} \\ (x_1, ..., x_k) & \mapsto & [x^I : 0 : ... : 0]_{I \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^n} \end{array} \right. .$$

□

Cela donne une stratification de X_Δ en orbites, suivant les faces de Δ.

Exemple. Les faces du triangle $\Delta_{2,d}$ donnent une stratification de $\mathbb{CP}^2$ (voir figure 11).

(a) Un polygone avec ses faces... (b) ... et la stratification associée

FIGURE 11

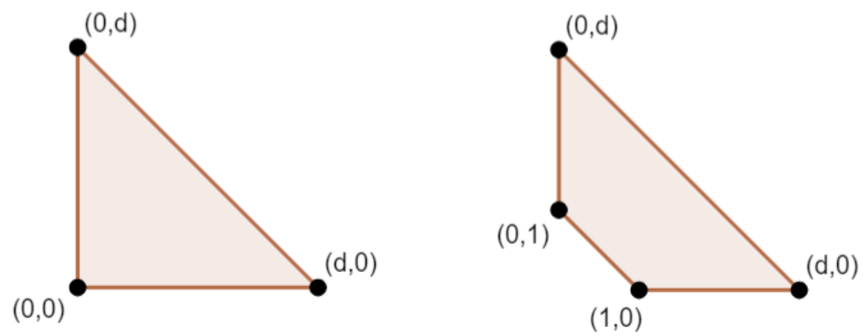
Théorème 3.4 (Kouchnirenko). Si $P_1, .., P_n$ sont des polynômes génériques de polytope de Newton Δ ($\dim(\Delta) = n$), alors

$$\#\{x \in (\mathbb{C}^*)^n \mid P_1(x) = ... = P_n(x) = 0\} = \mathrm{vol}(\Delta)$$

avec $\mathrm{vol}(\Delta) = n!\ \mathrm{Vol}(\Delta)$.

On peut trouver une démonstration dans le livre de Gelfand-Kapranov-Zelevinsky *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants.*

Exemple.
1. $\mathrm{vol}(\Delta_{2,d}) = d^2$ (voir figure 12a). Grâce au théorème de Bézout, on sait préalablement que le nombre de zéros communs entre deux courbes projectives de degré d est égal à d^2 (comptés avec multiplicités).
2. $\mathrm{vol}(\mathrm{Conv}(\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leqslant d\} \setminus \{(0, 0)\})) = d^2 - 1$ (voir figure 12b).

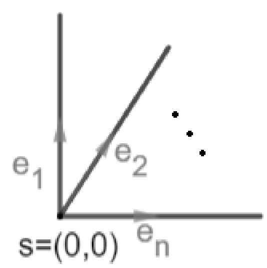


(a) $\Delta_{2,d}$ (b) $\mathrm{Conv}(\{(i,j) \mid i+j \leqslant d\} \setminus \{(0,0)\})$

FIGURE 12

Proposition 3.5. Δ est unimodulaire si et seulement si X_Δ est non singulière.

Démonstration. On démontra le sens nécessaire. Soit Δ un polyèdre unimodulaire (c'est-à-dire $(e_1, .., e_n)$ les vecteurs entiers primitifs des arêtes issus de tout sommet de Δ forment une base de $\mathbb{Z}^n$) et X_Δ la variété torique associée.
Soit $p \in X_\Delta$, on veut montrer que X_Δ est non singulière en p.
On sait qu'il existe une unique face Γ de Δ telle que $p \in \mathring{X}_\Gamma$. Soit s un sommet de Γ. À translation et action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ près, on peut supposer que $\Delta \subset \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$, $s = (0, .., 0)$ et e_j vecteurs canoniques.



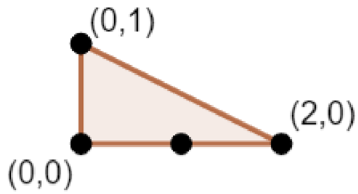
Dans une carte affine $y_0 \neq 0$, on a

$$\varphi_\Delta \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \to & \mathbb{C}^{\mathcal{N}} \\ x & \mapsto & (x_1, ..., x_n, ...) \end{array} \right. .$$

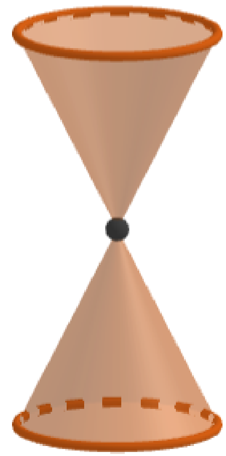
Donc φ_Δ s'étend sur $\mathbb{C}^n$ et $\varphi_{\Delta_{/\mathbb{C}^n}}$ est un plongement. Par suite, $p \in \varphi_\Delta(\mathbb{C}^n)$ et X_Δ est non singulière. $\square$

Exemple. Prenons l'exemple du polygone non unimodulaire Δ de la figure 13a. Dans ce cas φ_Δ sera donnée par

$$\phi_\Delta \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^2 & \to & \mathbb{CP}^3 \\ (x,y) & \mapsto & [1 : x : x^2 : y] \\ & & X \quad Y \quad Z \quad T \end{array} \right. .$$



(a) Δ



(b) X_Δ

FIGURE 13

La variété torique associée à Δ est $X_\Delta = \{Y^2 = XZ\}$. Il s'agit du cône quadratique, qui est bien singulier.

3.2 Cônes et variétés toriques

Soit $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ un cône de sommet 0, rationnel, finiment engendré sur $\mathbb{Z}^n$. Son cône dual est

$$\sigma^\vee = \{\ell \in M_\mathbb{R} \mid \ell_{|\sigma} \geqslant 0\}.$$

Si on identifie M, N à $\mathbb{Z}^n$, et $M_\mathbb{R}$, $N_\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$, alors $\sigma^\vee = \{y \in \mathbb{R}^n | \ \forall x \in \sigma, \langle y, x\rangle \geqslant 0\}$.
On associe au cône dual $\sigma^\vee$ l'anneau de fonctions :

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbb{C}[x^i = x_1^{i_1} ... x_n^{i_n},\ i = (i_1, ..., i_n) \in \sigma^\vee \cap M] \subseteq \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}].$$

La variété torique associée à $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbb{C}[u_1, ..., u_k]/I = \mathbb{C}[V(I)]$ est

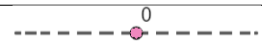
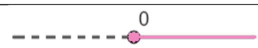
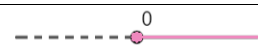
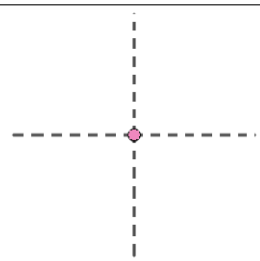
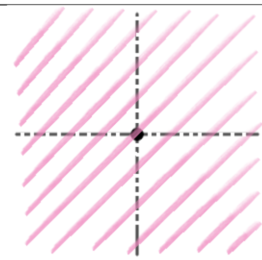
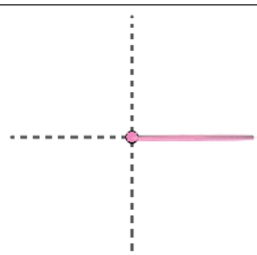
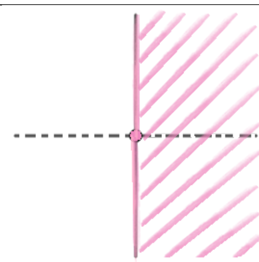
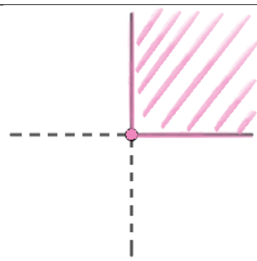
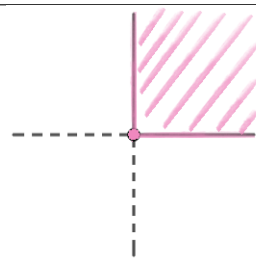
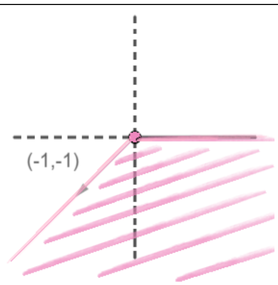
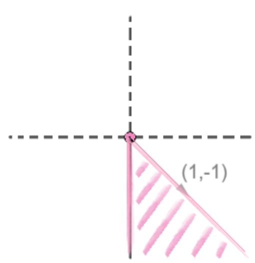
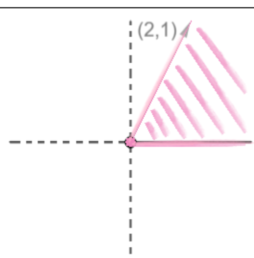
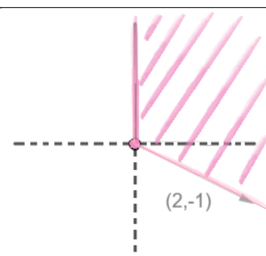
$$\mathbb{CP}_\sigma = V(I).$$

Le tableau de la figure 14 regroupe quelques exemples.

Remarque. Si $\tau \prec \sigma$, alors $\sigma^\vee \prec \tau^\vee$, par suite $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \subset \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$, et donc $\mathbb{CP}_\tau \hookrightarrow \mathbb{CP}_\sigma$.

Éventail. Soit Σ un éventail projectif et unimodulaire. On veut montrer que $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie PD, HL et HR pour tout élément ample (voir partie 2.3). On sait que la cohomologie $H^{2\bullet}(X)$ d'une variété complexe vérifie PD, HL et HR ; on voudrait se ramener à cette situation via les variétés toriques complexes.

Figure 14 – Exemples de variétés associées à des cônes

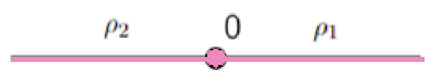
σ	$\sigma^\vee$	$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$	$\mathbb{CP}_\sigma$
		$\mathbb{C}[x, x^{-1}]$	$\mathbb{C}^*$
		$\mathbb{C}[x]$	$\mathbb{C}$
		$\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$	$(\mathbb{C}^*)^2$
		$\mathbb{C}[x, y^{\pm 1}]$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$
		$\mathbb{C}[x, y]$	$\mathbb{C}^2$
		$\mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}] = \mathbb{C}[u, v]$	$\mathbb{C}^2$
		$\mathbb{C}[y, x^2y^{-1}, x] = \mathbb{C}[u, v, w]_{/(uv=w^2)}$	$\{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 \mid uv = w^2\}$

Définition 3.6. La variété torique associée à Σ un éventail rationnel dans $N_{\mathbb{R}}$ est :

$$\mathbb{CP}_{\Sigma} = \left(\bigcup_{\sigma \text{ cône de } \Sigma} \mathbb{CP}_{\sigma} \right) / \text{identification par face commune}$$

Remarque. À $\sigma \in \Sigma$ on peut associer $\mathbb{CP}_{\sigma} \setminus \bigcup_{\substack{\tau \prec \sigma \\ \tau \neq \sigma}} \mathbb{CP}_{\tau}$, c'est-à-dire un tore de codimension $\dim(\sigma)$, noté $\mathbb{CP}_{\Sigma}^{\sigma}$. On a alors une stratification en tores : $\mathbb{CP}_{\Sigma} = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{CP}_{\Sigma}^{\sigma}$.

Exemple. Pour $n = 1$, on considère l'éventail suivant :



on remarque que $\mathbb{C}[\rho_1^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[\rho_2^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x^{-1}]$ et $\mathbb{C}[0^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$;

$$\begin{tikzcd} \mathbb{CP}_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathbb{CP}_{\rho_1} \\ & \mathbb{CP}_{\rho_2} \end{tikzcd}$$

Ainsi, $\mathbb{CP}_{\Sigma}$ est constituée de 2 copies de $\mathbb{C}$ recollées le long de $\mathbb{C}^*$ par $x \mapsto 1/x$. Il s'agit de $\mathbb{CP}^1$.

Remarque. On a une correspondance entre

$$\sigma \text{ cônes de } \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \text{orbites toriques de } \mathbb{CP}_{\Sigma}.$$

4 Anneau de Chow

Soit X une variété algébrique (régulière) de dimension n. On définit :

$$\begin{aligned} Z^k(X) &= \{\text{cycles algébriques sur } X \text{ de codim } k\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{combinaisons linéaires finies à coefficients dans } \mathbb{Z} \\ \text{de sous variétés algébriques fermées de codim } k. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathrm{Princ}(X) \subset Z^1(X).$$

où

$$\begin{aligned} Z^1(X) &= \{\text{diviseurs sur } X\}, \text{ et} \\ \mathrm{Princ}(X) &= \{\text{diviseurs principaux}\} \end{aligned}$$

$$= \Big\{ \mathrm{div}(f) = \sum_{D \text{ diviseur}} \mathrm{ord}_D(f).D, f \text{ fonction rationnelle sur } X \Big\}.$$

Définition 4.1. On définit le groupe de Picard sur X :

$$\mathrm{Pic}(X) = Z^1(X)/\mathrm{Princ}(X).$$

Définition 4.2. Les groupes de Chow de x sont :

$$A^k(X) = Z^k(X)/\sim_{\mathrm{lin}},$$

avec, pour Y_1, $Y_2 \in Z^k(X)$, $Y_1 \sim_{\mathrm{lin}} Y_2$ s'ils diffèrent par un diviseur rationnel c'est-à-dire s'il existe $Z \in Z^{k-1}(X)$ et f une fonction rationnelle sur Z telle que $\mathrm{div}(f) = Y_1 - Y_2$.

Définition 4.3. Si X est régulière, on obtient un anneau

$$A^i(X) \times A^j(X) \to A^{i+j}(X).$$

Si $Y \in Z^i(X)$ et $Z \in Z^j(X)$, le lemme de déplacement de Chow affirme que $Y \sim_{\mathrm{lin}} Y'$ avec Y' transverse à Z et $[Y].[Z] = [Y' \cap Z]$.

Prenons maintenant $X = \mathbb{CP}_\Sigma$ une variété torique associée à Σ.

Définition 4.4. On définit

$$\tilde{Z}^k(X) = \{\text{comb. linéaires de strates toriques } \mathbb{CP}_\Sigma^\sigma \text{ de codim } k \text{ dans } X\}$$

et

$$\tilde{A}^k(X) = \tilde{Z}^k(X)_{/\sim_{\mathrm{lin\ tor}}},$$

avec, pour Y_1, $Y_2 \in \tilde{Z}^k(X)$, $Y_1 \sim_{\mathrm{lin\ tor}} Y_2$ s'il existe $Z \in \tilde{Z^{k-1}}(X)$, f fonction rationnelle sur Z telle que $\mathrm{div}(f) = Y_1 - Y_2$.

Théorème 4.5.
1. $A^\bullet(\Sigma) \simeq \tilde{A}^\bullet(\mathbb{CP}_\Sigma)$ si Σ est complet unimodulaire.
2. $A^\bullet(X) \simeq \tilde{A}^\bullet(X)$.
3. $A^\bullet(X) \simeq H^{2\bullet}(X)$.