

# Propositions de sujets MATH.en.JEANS

## 1 Transvasement d'eau

On dispose de trois vases de capacités respectives 3, 5 et 8 litres. Au début, on remplit le vase de 8 litres.

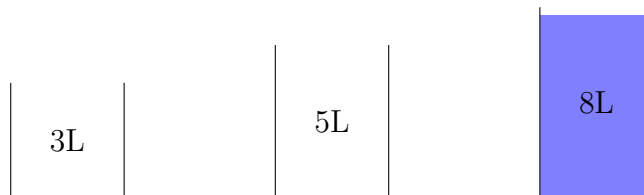


FIGURE 1 – Des vases.

- ▷ En versant l'eau d'un vase dans un autre, peut-on obtenir 1 litre ? 2 litres ? Et 3, 4, 5, 6 ou 7 litres ?
- ▷ Même questions si les vases font 3, 7 et 10 litres ; ou bien 5, 7 et 12 litres.
- ▷ Même questions si les vases font 4, 6 et 10 litres.
- ▷ Si les vases ont des capacités de  $A$ ,  $B$  et  $C$  litres, quelles sont les quantités d'eau que l'on peut mesurer ?

## 2 La formule de Pick

Sur une planche en bois, on dispose des clous pour former un quadrillage. Puis, avec une ficelle on entoure certains clous pour faire apparaître des polygones, comme sur la figure 1.

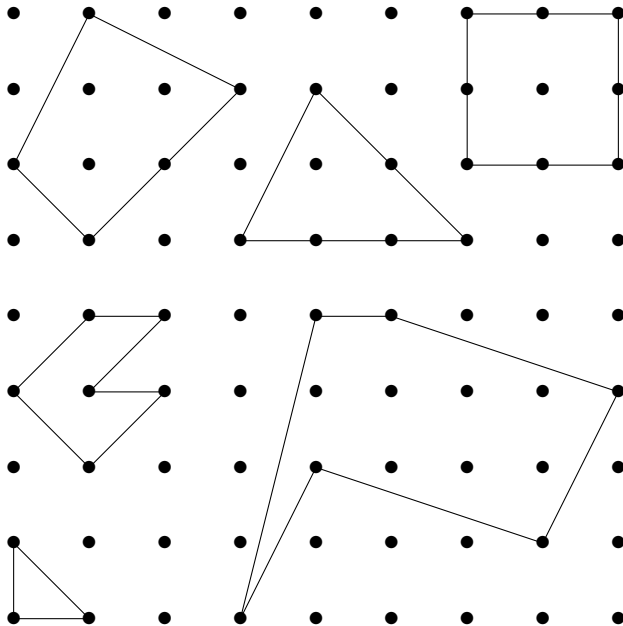


FIGURE 2 – Quelques polygones.

Étant donné un polygone, on note  $A$  son aire,  $B$  le nombre de clous sur son bord (sur la ficelle) et  $I$  le nombre de clous à l'intérieur du polygone (entourés par la ficelle).

▷ Pour les polygones de la figure 3, on a  $I = 0$ . Pouvez-vous trouver une relation entre  $A$  et  $B$  ?

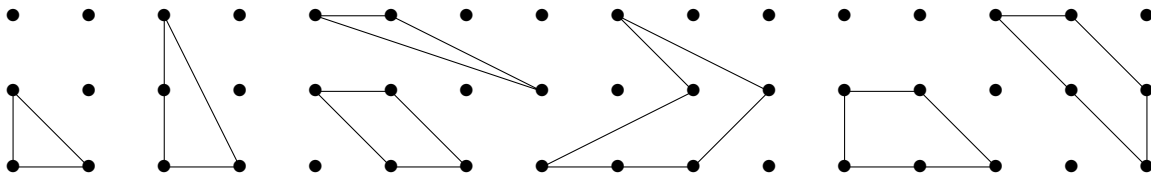


FIGURE 3 – Quelques polygones avec  $I = 0$ .

- ▷ Si le polygone entouré par la ficelle a une forme classique (par exemple un carré, un rectangle, un triangle...), pouvez-vous trouver une relation entre  $A$ ,  $B$  et  $I$  ?
- ▷ Pouvez-vous trouver une relation pour les polygones de la figure 2 ? Et en général ?

### 3 Les tours de Hanoï

On dispose de trois piquets. Sur le piquet de gauche sont enfilés des anneaux du plus gros au plus petit. Le but est de déplacer les anneaux sur le piquet de droite, en respectant les règles suivantes :

- ▷ on ne peut déplacer qu'un anneau à la fois,
- ▷ on ne peut pas poser un anneau sur un anneau plus petit.

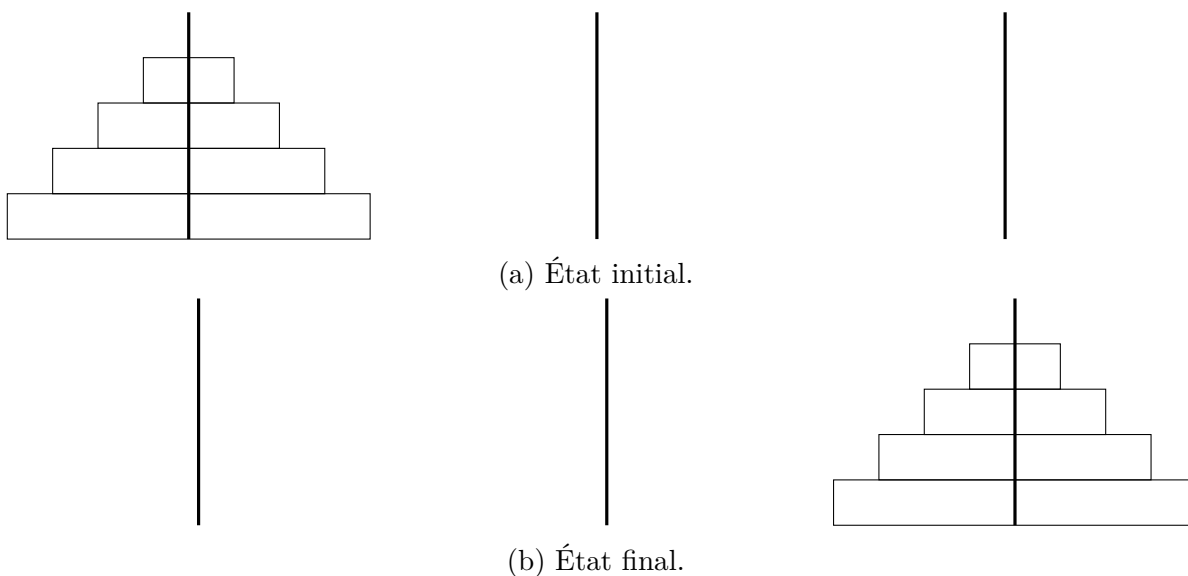


FIGURE 4 – Le problème des tours de Hanoï.

Voici quelques questions autour de ce jeu.

- ▷ Si on a 1, 2 ou 3 anneaux, proposer une solution au problème.
- ▷ Votre solution est-elle optimale, c'est-à-dire peut-on résoudre le problème en moins de coups ?
- ▷ Combien faut-il de coups au minimum avec 4, 5 ou 6 anneaux ? Avec  $n$  anneaux ?

On change un peu les règles du jeu. On étiquette maintenant les piquets  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

- ▷ On interdit les échanges d'anneaux entre les piquets  $A$  et  $C$ . Combien faut-il de coups pour faire passer tous les anneaux de  $A$  à  $C$  ?
- ▷ On n'autorise que les mouvements  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$  et  $C \rightarrow A$ . Combien faut-il de coups pour faire passer tous les anneaux de  $A$  à  $C$  ?

## 4 Invasion de zombies

Alerte ! La ville est attaquée par des zombies ! Les morts-vivants vont-ils atteindre votre quartier ?

On représente la ville par un quadrillage carré, et chaque quartier est un carré. Un beau (?) jour, les zombies apparaissent dans certains quartiers que l'on marque en rouge, et l'invasion se répand ainsi : chaque nuit, les quartiers libres voisins de 2 quartiers infectés sont à leur tour envahis. La figure suivante montre un exemple d'évolution de la situation.

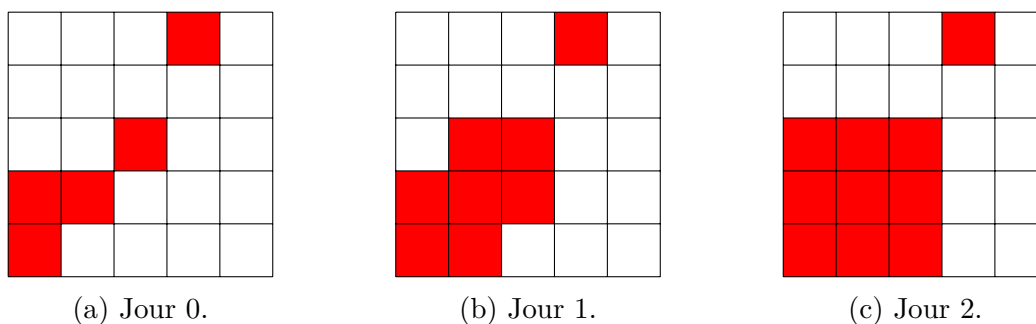


FIGURE 5 – Propagation des zombies.

- ▷ Quand la situation n'évolue plus, quelles propriétés vérifie la zone rouge envahie par les zombies ?
- ▷ On appelle "configuration désastreuse" une configuration au jour 0 permettant aux zombies d'envahir toute la ville. Existe-t-il une configuration désastreuse ? Quel est le nombre minimal de quartiers rouges pour une telle configuration (en fonction de la taille de la ville) ?
- ▷ Mêmes questions si la ville n'est plus carrée (vous pouvez étudier plusieurs formes !).
- ▷ On suppose que la ville contient  $n$  quartiers. Y-a-t-il des formes pour la ville minimisant ou maximisant le nombre de quartiers rouges dans une configuration désastreuse ?