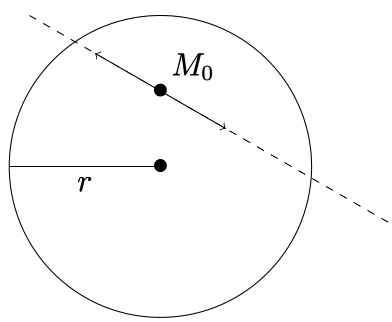
Propositions de sujets MATh.en.JEANS

1 La grande évasion

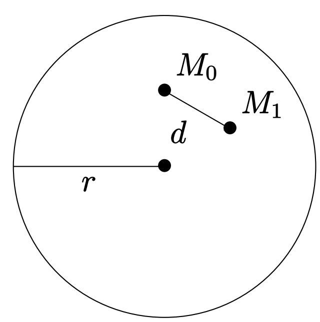
À la bergerie, les moutons ont décidé de se faire la malle... mais le chien de la bergère compte bien les en empêcher !

L'enclos est un disque de rayon r. Les moutons peuvent choisir une direction (c'est-à-dire une droite) selon laquelle s'enfuir. En aboyant, le chien les force alors à courir dans un sens ou l'autre, et les moutons se déplacent d'une distance d selon la direction choisie et le sens imposé par le chien. Puis on recommence jusqu'à ce que les moutons sortent de l'enclos ou abandonnent de fatigue.

Ci-dessous, un exemple. Les moutons sont au point M_0 et choisissent la droite indiquée ; il y a deux sens possibles. Le chien les force à se déplacer dans le sens qui les éloignent le plus du bord, et les moutons arrivent au point M_1. Ils choisissent une nouvelle droite, etc...



(a)



(b)

FIGURE 1 – Déplacement des moutons.

- ▷ Le chien peut-il empêcher les moutons de sortir ? Les moutons peuvent-ils mettre en place une stratégie pour sortir à coup sûr ?
- ▷ Et si maintenant l'enclos n'est plus circulaire ? On peut essayer avec d'autres formes !

2 Histoire de nœuds

Ewen cherche à faire un tour de magie : il veut faire un nœud avec une corde, puis simplement tirer sur les extrémités pour défaire le nœud. Il commence par des essais.

Il fait un nœud, pose sa corde à plat et donne un nom $(A, B, C, \dots)$ à chaque croisement de la corde. Il parcourt ensuite la corde de gauche à droite en notant l'ordre dans lequel il passe par les croisements, et ajoute à chaque lettre un $+$ si la corde passe sur elle-même, et un $-$ si elle passe sous elle-même. il obtient ainsi un mot.

Par exemple, avec le nœud ci-dessous il obtient $A^+B^+C^-D^+B^-C^+D^-A^-$.

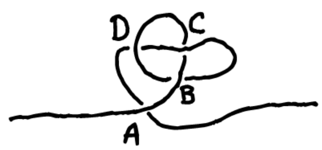


FIGURE 2 – Un exemple de nœud.

- ▷ Étant donné un mot, comment construire un nœud associé à ce mot ? Y-a-t-il des mots impossibles à obtenir ?

Un nœud est dit trivial si lorsqu'on tire sur ses extrémités il se défait entièrement. Ainsi, Ewen souhaite faire un nœud trivial pour son tour de magie.

FIGURE 3 – Un nœud trivial (gauche) et non-trivial (droite).

- ▷ Peut-on savoir avec les mots si un nœud est trivial ?
- ▷ La corde d'Ewen est comme ci-dessous. Réussira-t-il son tour de magie ?

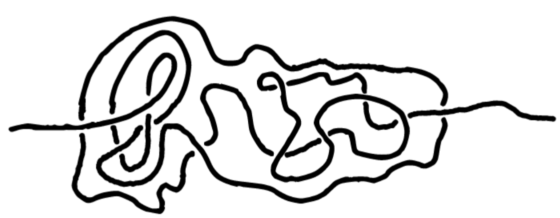


FIGURE 4 – Le nœud d'Ewen.

3 Une variante du jeu de Hex

On considère le jeu suivant. On dispose d'un plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont bleus, et les deux autres côtés sont rouges. Le plateau peut-être de dimension 6×6, 9×9, 11×11,...

Les deux joueuses se voient chacune attribuer une couleur, bleu ou rouge. La première joueuse pose un pion de sa couleur sur une case du plateau. Puis, à tour de rôle en commençant par la deuxième joueuse, elles posent deux pions de leur couleur sur des cases du plateau. Le but du jeu est de former un chemin de couleur continue entre les deux bords de sa couleur.

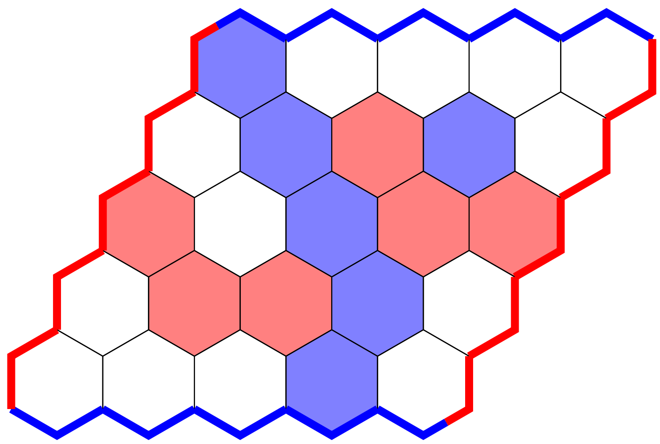


FIGURE 5 – Un exemple où la bleue a gagné.

- ▹ Peut-il y avoir une partie nulle, où aucune des deux joueuses ne gagnerait ?
- ▹ L'une des deux joueuses dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ? Autrement dit, peut-elle être sûre de gagner ?

4 Des triangles tricolores

Échauffement : segment bicolore en 1D. On considère un segment ayant un sommet bleu et et sommet vert. On place des points sur ce segment pour le couper en petits segments, puis on colorie chacun des points en bleu ou en vert.

▷ Justifiez qu'il y a au moins un petit segment dont les extrémités sont de couleurs différentes (on dira un segment bicolore). Que peut-on dire sur le nombre de segments bicolores ?

Les choses sérieuses : triangle tricolore en 2D. Soit $\mathcal{T}$ un triangle dont les sommets sont bleu, vert et rouge. On découpe $\mathcal{T}$ en petits triangles de sorte qu'aucun sommet d'un petit triangle ne soit sur le côté d'un autre.

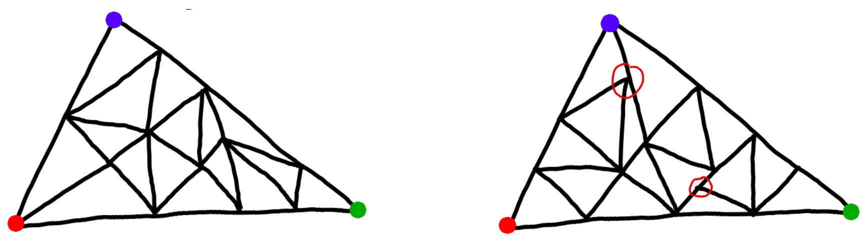


FIGURE 6 – Bon (à gauche) et mauvais (à droite) découpage.

On attribue une couleur à chacun des sommets des triangles selon les règles suivantes :

- si le sommet est sur le côté de $\mathcal{T}$, la couleur choisie doit être l'une des couleurs des sommets du côté,
- si le sommet est au centre de $\mathcal{T}$, on choisit la couleur qu'on veut.

Voici un exemple de tels choix.

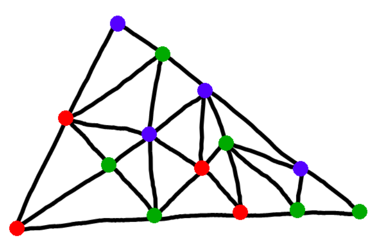


FIGURE 7 – Exemple de coloriage.

▷ Construisez des exemples. Sur chacun des exemples, pouvez-vous trouver un triangle tricolore, c'est-à-dire un triangle dont les 3 sommets ont des couleurs différentes ?

▷ Y-a-t-il toujours un triangle tricolore, ou pouvez-vous construire un contre-exemple ?