

Propositions de sujets MATH.en.JEANS

1 Géométrie à l'ancienne

Le but de ce problème est de faire des constructions géométriques avec des instruments restreints : on ne dispose que d'une règle non graduée et d'un compas (et d'un crayon).

Les règles sont les suivantes. Sur une feuille blanche, on dispose d'un ensemble de points. À partir de ces points on peut tracer la droite passant par deux d'entre eux, ou le cercle de centre l'un et passant par l'autre. En intersectant droites et cercles ainsi construits on obtient de nouveaux points, qui permettent de tracer de nouveaux cercles et de nouvelles droites, et ainsi de suite.

- ▷ Quelles constructions géométriques connaissez-vous utilisant ces règles ?

Supposons que l'on commence avec deux points O et I sur la feuille. Un *point constructible* est un point qu'on peut obtenir en intersectant droites et cercles qu'on peut tracer.

- ▷ Pouvez-vous construire un point J de sorte que les points O , I et J forment un repère orthonormé ?

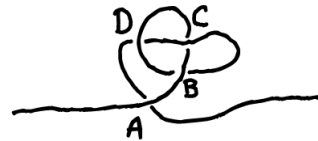
On note alors $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$ et $J = (0, 1)$. Un *nombre constructible* est l'abscisse ou l'ordonnée d'un point constructible. Par exemple, 0 et 1 sont constructibles.

- ▷ Quels autres nombres pouvez-vous construire ?
- ▷ Pouvez-vous trouver des conditions algébriques pour qu'un nombre soit constructible ?

2 Histoire de nœuds

Prenez une corde, faites un nœud, puis tirez sur les extrémités. La plupart du temps vous serrerez le nœud, mais parfois il se défera comme par magie. Le but est d'étudier ces situations.

Pour cela, on va associer un *mot* à un nœud de la façon suivante. On fait un nœud, pose la corde à plat et donne un nom (A, B, C, \dots) à chaque croisement de la corde. On parcourt ensuite la corde de gauche à droite en notant l'ordre dans lequel on passe par les croisements, et ajoute à chaque lettre un $+$ si la corde passe sur elle-même, et un $-$ si elle passe sous elle-même. Par exemple, avec le nœud ci-contre on obtient le mot $A^+B^+C^-D^+B^-C^+D^-A^-$.



▷ Étant donné un mot, peut-on toujours construire un nœud associé à ce mot ?

Deux nœuds sont identiques si on peut obtenir le second à partir du premier en bougeant les brins de la corde, sans toucher aux extrémités.

▷ Donner des exemples de nœuds identiques. Comment cela se traduit-il sur les mots ?

Un nœud est *trivial* si lorsqu'on tire sur ses extrémités il se défait entièrement, comme le nœud ci-contre. Ainsi, les tours de magie correspondent à des nœuds triviaux.



▷ Peut-on déterminer avec les mots si un nœud est trivial ?

▷ On fait le nœud ci-dessous. Correspond-il à un tour de magie ?

